Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Dénombrement

Table des matières

1 Introduction et problématique **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
- 2.1 Prérequis . . . 2
- 2.2 Objectifs . . . 2
- 2.3 Enjeux didactiques . . . 3

3 Principes fondamentaux **3**
- 3.1 Cardinal d'un ensemble fini . . . 3
- 3.2 Principe additif . . . 3
- 3.3 Principe multiplicatif . . . 3
- 3.4 Principe de complémentarité . . . 4
- 3.5 Principe d'inclusion-exclusion . . . 4

4 Dénombrement des applications **4**
- 4.1 Nombre d'applications . . . 4
- 4.2 Applications injectives . . . 4

5 Factorielle et permutations **5**
- 5.1 Factorielle . . . 5
- 5.2 Permutations . . . 5

6 Arrangements **5**

7 Combinaisons **6**
- 7.1 Définition et formule . . . 6
- 7.2 Propriétés des coefficients binomiaux . . . 6
- 7.3 Formule du binôme de Newton . . . 7

8 Dénombrement avec répétition **7**
- 8.1 Listes avec répétition . . . 7
- 8.2 Combinaisons avec répétition . . . 7

9 Applications au calcul des probabilités **8**
- 9.1 Probabilité sur un univers fini équiprobable . . . 8
- 9.2 Loi binomiale . . . 8

10 Méthodes de résolution et points de vigilance **8**
- 10.1 Tableau récapitulatif . . . 9

11 Ouverture pédagogique **9**

12 Conclusion **9**

1 Introduction et problématique

Le dénombrement consiste à déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble fini sans nécessairement les énumérer explicitement.

Il intervient dans de nombreux domaines :

— les probabilités, pour calculer des probabilités dans des univers finis ;

— l'informatique, pour étudier le nombre de configurations possibles ;

— la combinatoire, pour dénombrer des arrangements, des permutations et des combinaisons.

La difficulté essentielle consiste à traduire un problème concret en un modèle mathématique adapté, puis à choisir les règles de dénombrement pertinentes.

Problématique : comment dénombrer efficacement les éléments d'un ensemble fini en fonction de la structure du problème posé ?

Nous présenterons les principes fondamentaux du dénombrement, puis les principaux outils combinatoires et leurs applications.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La compréhension du dénombrement mobilise plusieurs notions mathématiques préalables :

— les ensembles finis, les sous-ensembles et les opérations sur les ensembles ;

— les opérations arithmétiques et les puissances ;

— la notion de produit cartésien ;

— les fonctions, en particulier les injections, les surjections et les bijections ;

— les raisonnements par disjonction de cas et par récurrence ;

— les premières notions de probabilités, notamment la notion d'équiprobabilité.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on doit être capable de :

— définir le cardinal d'un ensemble fini et utiliser les principes additif et multiplicatif ;

— dénombrer les applications entre deux ensembles finis ;

— calculer le nombre de permutations et d'arrangements ;

— distinguer les situations où l'ordre intervient de celles où il n'intervient pas ;

— établir et utiliser la formule des coefficients binomiaux ;

— démontrer la relation de Pascal et la formule du binôme de Newton ;

— traiter des problèmes avec ou sans répétition ;

— appliquer les techniques de dénombrement au calcul de probabilités dans un univers fini équiprobable ;

— choisir et justifier une méthode de dénombrement adaptée à une situation donnée.

2.3 Enjeux didactiques

L'enjeu didactique principal est de faire comprendre que le choix d'une formule dépend de la nature des objets comptés et des contraintes du problème.

L'élève doit notamment apprendre à répondre à trois questions :

1. L'ordre des éléments intervient-il ?
2. Les répétitions sont-elles autorisées ?
3. Compte-t-on des listes, des parties ou des applications ?

La résolution de problèmes concrets, l'utilisation d'arbres de choix et la comparaison de plusieurs méthodes permettent de construire progressivement ces distinctions.

3 Principes fondamentaux

3.1 Cardinal d'un ensemble fini

Définition 3.1. Le cardinal d'un ensemble fini E, noté $\mathrm{Card}(E)$, est le nombre de ses éléments.

Par convention, le cardinal de l'ensemble vide est nul :

$$\mathrm{Card}(\varnothing) = 0.$$

Exemple 3.2. Si $E = \{a, b, c, d\}$, alors $\mathrm{Card}(E) = 4$.

3.2 Principe additif

Théorème 3.3 (Principe additif)**.** *Soient A et B deux ensembles finis disjoints. Alors*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B).$$

Plus généralement, si les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints, alors

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}(A_i).$$

Démonstration. Chaque élément de l'union appartient à un unique ensemble parmi les A_i. Le comptage des éléments de chaque ensemble ne produit donc aucun double comptage. □

Exemple 3.4. Une bibliothèque propose 8 romans et 5 recueils de poésie. Si les deux catégories sont disjointes, le nombre de livres que l'on peut choisir parmi ces 13 ouvrages est

$$8 + 5 = 13.$$

3.3 Principe multiplicatif

Théorème 3.5 (Principe multiplicatif)**.** *Si une procédure se déroule en n étapes successives et si l'étape i offre n_i possibilités, indépendamment des choix précédents, alors le nombre total de résultats possibles est*

$$n_1 n_2 \cdots n_n.$$

Démonstration. On peut représenter les choix par un arbre. Chaque choix à une étape se prolonge par les possibilités de l'étape suivante. Le nombre de chemins complets est donc le produit des nombres de possibilités successifs. □

Exemple 3.6. Un code est constitué de trois chiffres décimaux. Les chiffres peuvent être répétés et le code peut commencer par zéro. Il existe

$$10^3 = 1000$$

codes possibles.

3.4 Principe de complémentarité

Propriété 3.7. *Si A est une partie d'un ensemble fini E, alors*

$$\mathrm{Card}(E \setminus A) = \mathrm{Card}(E) - \mathrm{Card}(A).$$

Exemple 3.8. Parmi les nombres de 1 à 100, combien ne sont pas divisibles par 10 ?

Il y a 100 entiers et 10 multiples de 10. Le nombre recherché est donc

$$100 - 10 = 90.$$

3.5 Principe d'inclusion-exclusion

Théorème 3.9. *Pour deux parties A et B d'un ensemble fini,*

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B).$$

Démonstration. Dans la somme $\mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B)$, les éléments de $A \cap B$ sont comptés deux fois. Il faut donc soustraire une fois le cardinal de cette intersection. □

Exemple 3.10. Dans une classe, 18 élèves étudient l'anglais, 12 l'espagnol et 5 étudient les deux langues. Le nombre d'élèves étudiant au moins l'une des deux langues est

$$18 + 12 - 5 = 25.$$

4 Dénombrement des applications

4.1 Nombre d'applications

Théorème 4.1. *Soient E et F deux ensembles finis tels que* $\mathrm{Card}(E) = n$ *et* $\mathrm{Card}(F) = p$. *Le nombre d'applications de E dans F est*

$$\boxed{p^n}.$$

Démonstration. Pour chaque élément de E, on choisit son image dans F. Il y a p possibilités pour chacun des n éléments. Le principe multiplicatif donne p^n applications. □

Exemple 4.2. Le nombre de suites de longueur 4 à valeurs dans un ensemble à 3 éléments est

$$3^4 = 81.$$

4.2 Applications injectives

Une application est injective lorsque deux éléments distincts de son ensemble de départ ont des images distinctes.

Théorème 4.3. *Si* $\mathrm{Card}(E) = n$ *et* $\mathrm{Card}(F) = p$, *avec $n \leq p$, le nombre d'applications injectives de E dans F est*

$$\boxed{\frac{p!}{(p-n)!}}.$$

Démonstration. On ordonne les éléments de E. L'image du premier élément peut être choisie de p façons, celle du deuxième de $p-1$ façons, et ainsi de suite. Le nombre total est

$$p(p-1)\cdots(p-n+1) = \frac{p!}{(p-n)!}.$$

□

5 Factorielle et permutations

5.1 Factorielle

Définition 5.1. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n,$$

et l'on pose $0! = 1$.

La convention $0! = 1$ permet notamment d'écrire les formules combinatoires de manière uniforme.

5.2 Permutations

Définition 5.2. Une permutation d'un ensemble fini E est une bijection de E dans lui-même.

Théorème 5.3. *Un ensemble à n éléments possède exactement*

$$\boxed{n!}$$

permutations.

Démonstration. Pour ordonner les n éléments, on dispose de n choix pour la première position, de $n-1$ pour la deuxième, et ainsi de suite, jusqu'à un choix pour la dernière. Le principe multiplicatif donne

$$n(n-1)\cdots 1 = n!.$$

□

Exemple 5.4. Le nombre de façons de placer cinq livres distincts sur une étagère est

$$5! = 120.$$

Remarque 5.5. Si certains objets sont indiscernables, la formule $n!$ ne s'applique pas directement. Il faut tenir compte des permutations qui ne modifient pas la disposition observée.

6 Arrangements

Définition 6.1. Un arrangement de p éléments parmi n éléments distincts est une sélection ordonnée de p éléments distincts parmi les n éléments disponibles.

Théorème 6.2. *Pour $0 \leq p \leq n$, le nombre d'arrangements de p éléments parmi n est*

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}.$$

Démonstration. Le premier élément se choisit de n façons, le deuxième de $n-1$ façons, et le p-ième de $n-p+1$ façons. Ainsi,

$$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

□

Exemple 6.3. Dans une course réunissant 8 concurrents, le nombre de classements possibles pour les trois premières places est

$$A_8^3 = 8 \times 7 \times 6 = 336.$$

7 Combinaisons

7.1 Définition et formule

Définition 7.1. Une combinaison de p éléments parmi n éléments distincts est une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments. L'ordre des éléments n'intervient pas.

Théorème 7.2. *Pour $0 \leq p \leq n$, le nombre de combinaisons est*

$$\boxed{\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}.$$

Démonstration. Comptons d'abord les arrangements de p éléments parmi n. Chaque partie à p éléments donne lieu à exactement $p!$ ordres possibles. Par conséquent,

$$A_n^p = p!\binom{n}{p}.$$

Comme $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, on obtient

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

□

Exemple 7.3. On veut former un groupe de 3 personnes parmi 10 personnes. Le nombre de groupes possibles est

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = 120.$$

7.2 Propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 7.4. *Pour tout entier $n \geq 0$,*

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Pour $0 \leq p \leq n$,

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}.$$

Démonstration. La formule factorielle donne

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{n-p}.$$

□

Théorème 7.5 (Relation de Pascal)**.** *Pour $1 \leq p \leq n-1$,*

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}}.$$

Démonstration. Fixons un élément a parmi les n éléments. Une partie à p éléments contient soit a, soit ne contient pas a.

Dans le premier cas, il faut choisir $p-1$ éléments parmi les $n-1$ autres ; dans le second, il faut en choisir p. Le principe additif donne la relation annoncée. □

7.3 Formule du binôme de Newton

Théorème 7.6 (Binôme de Newton)**.** *Pour tous réels a, b et tout entier $n \geq 0$,*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^{n-p} b^p}.$$

Démonstration. Dans le développement de

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b)\cdots(a+b),$$

un terme en $a^{n-p}b^p$ est obtenu en choisissant b dans exactement p des n facteurs et a dans les autres. Le nombre de ces choix est $\binom{n}{p}$. □

Corollaire 7.7. *En prenant $a = b = 1$, on obtient*

$$\boxed{\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n}.$$

Cette égalité exprime le fait qu'un ensemble à n éléments possède 2^n parties.

8 Dénombrement avec répétition

Il faut distinguer deux situations : les choix ordonnés et les choix non ordonnés, avec ou sans répétition.

8.1 Listes avec répétition

Le nombre de listes de longueur p construites à partir de n éléments, lorsque les répétitions sont autorisées, est

$$\boxed{n^p}.$$

Exemple 8.1. Le nombre de codes de quatre chiffres, avec répétition autorisée, est

$$10^4 = 10000.$$

8.2 Combinaisons avec répétition

Théorème 8.2. *Le nombre de multiensembles de cardinal p construits à partir de n types d'objets est*

$$\boxed{\binom{n+p-1}{p}}.$$

Démonstration. Une telle sélection est décrite par des entiers $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant

$$x_1 + \cdots + x_n = p, \qquad x_i \geq 0.$$

La méthode des étoiles et des barres représente les p objets par des étoiles et sépare les n catégories par $n-1$ barres. Il faut choisir les positions des p étoiles parmi les $n+p-1$ positions, d'où

$$\binom{n+p-1}{p}.$$

□

Exemple 8.3. Le nombre de façons de choisir 4 boules de glace parmi 3 parfums, avec répétition autorisée et sans tenir compte de l'ordre, est

$$\binom{3+4-1}{4} = \binom{6}{4} = 15.$$

9 Applications au calcul des probabilités

9.1 Probabilité sur un univers fini équiprobable

Définition 9.1. Si Ω est un univers fini dont les issues sont équiprobables, alors, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\boxed{\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}}.$$

Le dénombrement permet donc de calculer une probabilité en comptant les issues favorables et les issues possibles.

Application 9.2. On tire simultanément deux cartes distinctes dans un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir deux as ?

Le nombre de tirages possibles est

$$\binom{32}{2} = 496.$$

Il y a 4 as et donc

$$\binom{4}{2} = 6$$

tirages favorables.

La probabilité recherchée est

$$\boxed{\mathbb{P}(\text{deux as}) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{6}{496} = \frac{3}{248}}.$$

9.2 Loi binomiale

Définition 9.3. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ lorsque X compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes, chacune ayant une probabilité de succès p.

Théorème 9.4. *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors, pour $k \in \{0,\dots,n\}$,*

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}}.$$

Démonstration. Pour obtenir exactement k succès, il faut choisir les k positions des succès parmi les n épreuves. Il existe $\binom{n}{k}$ choix possibles.

Pour chaque choix fixé, l'indépendance donne une probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$. Les configurations étant disjointes, on obtient la formule annoncée. □

10 Méthodes de résolution et points de vigilance

Pour résoudre un problème de dénombrement, il est utile de procéder dans l'ordre suivant :

1. Identifier précisément les objets à compter.
2. Déterminer si l'ordre intervient.
3. Vérifier si les répétitions sont autorisées.
4. Repérer les choix successifs ou les cas disjoints.
5. Choisir le principe additif, multiplicatif, une formule d'arrangement ou une formule de combinaison.
6. Vérifier la cohérence du résultat.

10.1 Tableau récapitulatif

Situation	**Caractéristiques**	**Nombre**
Liste de longueur p	Ordre, répétition autorisée	n^p
Arrangement	Ordre, sans répétition	$\dfrac{n!}{(n-p)!}$
Permutation	Ordre de tous les éléments	$n!$
Combinaison	Sans ordre, sans répétition	$\binom{n}{p}$
Combinaison avec répétition	Sans ordre, répétition autorisée	$\binom{n+p-1}{p}$

Remarque 10.1. Le tableau suppose que les n éléments ou types d'objets sont distingués. La présence d'objets identiques ou de contraintes supplémentaires peut modifier le dénombrement.

11 Ouverture pédagogique

Le dénombrement se prête à une progression pédagogique fondée sur la résolution de problèmes.

Au collège, les élèves peuvent commencer par des listes, des tableaux à double entrée et des arbres de choix.

Au lycée, on introduit progressivement les principes additif et multiplicatif, les permutations, les combinaisons et les coefficients binomiaux, en lien avec les probabilités.

L'enjeu pédagogique est d'amener les élèves à justifier la méthode choisie, plutôt qu'à appliquer mécaniquement une formule.

Une situation simple, telle que la constitution d'un comité ou la création d'un code, permet de comparer plusieurs modèles et de mettre en évidence le rôle de l'ordre et des répétitions.

12 Conclusion

Le dénombrement repose sur quelques principes essentiels : l'addition pour réunir des cas disjoints, la multiplication pour compter des choix successifs et la complémentarité pour compter par différence.

Les arrangements, les permutations et les combinaisons permettent ensuite de traiter des situations plus structurées. Les coefficients binomiaux relient ces méthodes au binôme de Newton, tandis que les probabilités en constituent une application majeure.

La maîtrise du dénombrement repose avant tout sur la modélisation correcte du problème : il faut identifier ce qui est compté, préciser si l'ordre importe et déterminer si les répétitions sont possibles.

Références

[1] Miklós Bóna, *A Walk Through Combinatorics : An Introduction to Enumeration and Graph Theory*, World Scientific Publishing, 4e édition, 2016.

[2] Ian P. Goulden et David M. Jackson, *Combinatorial Enumeration*, Dover Publications, 2004 (réédition).

[3] Herbert S. Wilf, *generatingfunctionology*, 3e édition, A K Peters, 2006. Version électronique disponible sur : `https://www2.math.upenn.edu/~wilf/DownldGF.html`.

[4] Charles M. Grinstead et J. Laurie Snell, *Introduction to Probability*, 2e édition, American Mathematical Society, 1997. Version électronique disponible sur : `https://math.dartmouth.edu/~prob/prob/prob.pdf`.

[5] Sheldon M. Ross, *A First Course in Probability*, Pearson. Ouvrage de référence pour les probabilités discrètes, les dénombrements et les lois usuelles.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes en vigueur sont consultables sur : `https://www.education.gouv.fr/`.

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques du lycée*. Éduscol. Disponible sur : `https://eduscol.education.fr/`.

[8] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES externe de mathématiques : programmes, épreuves et rapports de jury*. Les documents officiels sont accessibles sur : `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/`.