Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Expérience aléatoire, probabilité, probabilité conditionnelle

Table des matières

1 Introduction et problématique **2**

2 Prérequis et objectifs **2**

2.1 Prérequis . . . 2

2.2 Objectifs de la leçon . . . 2

2.3 Compétences travaillées . . . 2

3 Expérience aléatoire et univers **3**

3.1 Expérience aléatoire . . . 3

3.2 Univers et événements . . . 3

4 Probabilité sur un univers fini **3**

4.1 Définition axiomatique . . . 3

4.2 Cas de l'équiprobabilité . . . 4

4.3 Arbres et tableaux . . . 4

5 Probabilité conditionnelle **4**

5.1 Définition . . . 4

5.2 Formule des probabilités composées . . . 5

5.3 Formule des probabilités totales . . . 5

5.4 Formule de Bayes . . . 5

6 Indépendance de deux événements **6**

7 Exercice d'application corrigé **6**

7.1 Énoncé . . . 6

7.2 Correction . . . 7

8 Aspects didactiques et pédagogiques **7**

8.1 Progression pédagogique . . . 7

8.2 Difficultés fréquentes des élèves . . . 8

8.3 Pistes de remédiation . . . 8

9 Conclusion **8**

Références bibliographiques **9**

1 Introduction et problématique

La théorie des probabilités permet de modéliser des situations dont l'issue est incertaine, mais pour lesquelles on peut quantifier les chances de réalisation des différents événements.

Elle intervient dans de nombreux domaines : statistiques, sciences expérimentales, économie, médecine, informatique et analyse des risques.

On peut organiser cette leçon autour de trois questions :

— Comment modéliser une expérience aléatoire ?
— Comment associer une probabilité à un événement ?
— Comment actualiser une probabilité lorsqu'une information supplémentaire est disponible ?

La dernière question conduit à la notion de probabilité conditionnelle.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Pour aborder cette leçon, les élèves doivent maîtriser les notions suivantes :

— les ensembles et leurs opérations : union, intersection, complémentaire ;
— les fractions, les proportions, les pourcentages et les calculs numériques ;
— la lecture et l'interprétation de tableaux à double entrée et de représentations arborescentes simples ;
— la notion de fréquence et son interprétation dans une série de données ;
— le dénombrement élémentaire, notamment dans les situations d'équiprobabilité.

2.2 Objectifs de la leçon

À l'issue de l'étude de cette leçon, les élèves doivent être capables de :

— modéliser une expérience aléatoire à l'aide d'un univers et identifier les événements associés ;
— calculer la probabilité d'un événement et utiliser les propriétés fondamentales des probabilités ;
— distinguer une situation d'équiprobabilité d'une situation où les issues ont des probabilités différentes ;
— calculer une probabilité conditionnelle et interpréter le résultat obtenu ;
— utiliser la formule des probabilités composées et la formule des probabilités totales ;
— construire et exploiter un arbre pondéré ;
— reconnaître et caractériser l'indépendance de deux événements ;
— mobiliser, lorsque le problème s'y prête, la formule de Bayes pour déterminer une probabilité conditionnelle dans le sens inverse.

2.3 Compétences travaillées

Cette leçon contribue au développement des compétences suivantes :

— **Chercher :** identifier les événements pertinents et choisir une stratégie de résolution ;
— **Modéliser :** traduire une situation concrète en langage probabiliste ;
— **Calculer :** appliquer les formules adaptées et effectuer les calculs avec rigueur ;
— **Représenter :** utiliser des tableaux et des arbres pondérés ;
— **Raisonner :** justifier les résultats en précisant les hypothèses nécessaires ;
— **Communiquer :** interpréter une probabilité dans le contexte de la situation étudiée.

3 Expérience aléatoire et univers

3.1 Expérience aléatoire

Définition 1. *Une **expérience aléatoire** est une expérience dont on connaît les issues possibles, mais dont on ne peut pas prévoir avec certitude le résultat avant sa réalisation.*

Exemple 1. *On lance un dé équilibré à six faces et on observe le numéro obtenu. Les issues possibles sont les nombres de 1 à 6.*

3.2 Univers et événements

Définition 2. *L'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** et est généralement noté Ω.*

Dans le cas du lancer d'un dé :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Définition 3. *Un **événement** est une partie de l'univers Ω. Il est réalisé si l'issue obtenue appartient à cette partie.*

Par exemple, l'événement A : « obtenir un nombre pair » est

$$A = \{2, 4, 6\}.$$

On distingue notamment :

- l'événement élémentaire $\{\omega\}$, constitué d'une seule issue ;
- l'événement certain Ω ;
- l'événement impossible $\varnothing$;
- l'événement contraire $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Pour deux événements A et B :

- $A \cap B$ signifie que A et B sont réalisés simultanément ;
- $A \cup B$ signifie qu'au moins l'un des deux événements est réalisé ;
- $A \cap B = \varnothing$ signifie que A et B sont incompatibles.

4 Probabilité sur un univers fini

4.1 Définition axiomatique

Définition 4. *Une probabilité sur un univers fini Ω est une application*

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

telle que :

1. $P(\Omega) = 1$;
2. *pour tous événements incompatibles A et B,*

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Cette définition permet d'établir les propriétés usuelles des probabilités.

Propriété 1. *Pour tout événement A :*

$$P(\varnothing) = 0, \qquad 0 \leq P(A) \leq 1,$$

et

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Propriété 2 (Formule d'addition)**.** *Pour deux événements quelconques A et B :*

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).}$$

En particulier, si A et B sont incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4.2 Cas de l'équiprobabilité

Définition 5. *Il y a équiprobabilité lorsque toutes les issues élémentaires ont la même probabilité.*

Si l'univers fini Ω comporte n issues équiprobables, alors, pour tout événement A :

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.}$$

Autrement dit :

$$P(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}.$$

Exemple 2. *On lance un dé équilibré à six faces. Pour l'événement A : « obtenir un nombre pair », on a*

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Point de vigilance : cette formule n'est applicable que si les issues élémentaires sont équiprobables. Le simple fait qu'une expérience comporte un nombre fini d'issues ne suffit pas.

4.3 Arbres et tableaux

Un arbre de probabilités permet de représenter les étapes successives d'une expérience aléatoire. Les probabilités portées par les branches issues d'un même sommet ont une somme égale à 1.

Dans un tableau à double entrée, les probabilités des intersections peuvent être présentées en fonction de deux critères.

Ces représentations facilitent le calcul des probabilités et préparent l'introduction des probabilités conditionnelles.

5 Probabilité conditionnelle

5.1 Définition

Définition 6. *Soient A et B deux événements tels que $P(B) > 0$. La probabilité de A sachant B, notée $P_B(A)$ ou $P(A \mid B)$, est définie par :*

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.}$$

Cette probabilité mesure la chance que A se réalise lorsque l'on sait déjà que B est réalisé.

Le dénominateur $P(B)$ correspond à la probabilité de l'information dont on dispose. L'intersection $A \cap B$ correspond aux situations où cette information est compatible avec la réalisation de A.

Exemple 3. *On choisit au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit A l'événement « la carte est un roi » et B l'événement « la carte est une figure ».*

Il y a 12 figures, dont 4 rois. Ainsi :

$$P(B) = \frac{12}{32}, \qquad P(A \cap B) = \frac{4}{32}.$$

Par conséquent :

$$P_B(A) = \frac{4/32}{12/32} = \frac{1}{3}.$$

Sachant que la carte tirée est une figure, la probabilité que ce soit un roi est donc $\frac{1}{3}$.

5.2 Formule des probabilités composées

La définition précédente entraîne immédiatement :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B)P_B(A).}$$

Lorsque $P(A) > 0$, on dispose également de :

$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B).$$

Ces deux expressions correspondent à deux décompositions de la même probabilité.

5.3 Formule des probabilités totales

Théorème 1. *Soient $B_1, \ldots, B_n$ des événements formant une partition de Ω, avec $P(B_i) > 0$ pour tout i. Alors, pour tout événement A :*

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A).}$$

La partition signifie que les événements B_i sont deux à deux incompatibles et que leur réunion est Ω.

Dans le cas de deux événements B et $\overline{B}$, lorsque les deux probabilités conditionnelles sont définies :

$$\boxed{P(A) = P(B)P_B(A) + P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A).}$$

Cette formule est particulièrement utile pour les expériences à plusieurs étapes, les arbres pondérés et les problèmes de dépistage.

5.4 Formule de Bayes

Théorème 2 (Formule de Bayes)**.** *Soient A et B deux événements tels que $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$. Alors :*

$$\boxed{P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}.}$$

Si $B_1, \ldots, B_n$ forment une partition de l'univers et si $P(A) > 0$, alors :

$$\boxed{P_A(B_j) = \frac{P(B_j)P_{B_j}(A)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)}.}$$

Cette formule permet de remonter d'une observation à la cause possible de cette observation.

6 Indépendance de deux événements

Définition 7. *Deux événements A et B sont indépendants si :*

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B).}$$

Lorsque $P(B) > 0$, cette égalité équivaut à :

$$P_B(A) = P(A).$$

Ainsi, lorsque A et B sont indépendants, la connaissance de la réalisation de B ne modifie pas la probabilité de A.

Il convient de distinguer :

- des événements incompatibles, qui ne peuvent pas se réaliser simultanément ;
- des événements indépendants, pour lesquels la probabilité de l'intersection est le produit des probabilités.

Si A et B sont incompatibles et de probabilités strictement positives, ils ne sont pas indépendants.

En effet, dans ce cas :

$$P(A \cap B) = 0 \quad \text{mais} \quad P(A)P(B) > 0.$$

7 Exercice d'application corrigé

7.1 Énoncé

Une entreprise utilise deux machines M_1 et M_2 pour produire des pièces.

La machine M_1 produit 60 % des pièces et la machine M_2 en produit 40 %.

La proportion de pièces défectueuses est de 2 % pour M_1 et de 5 % pour M_2.

On choisit une pièce au hasard. On note :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- M_1 : « la pièce provient de la machine M_1 » ;
- M_2 : « la pièce provient de la machine M_2 ».

1. Construire un arbre de probabilités.
2. Calculer la probabilité qu'une pièce soit défectueuse.
3. Calculer la probabilité qu'une pièce provienne de M_2, sachant qu'elle est défectueuse.

7.2 Correction

1. Construction de l'arbre

Les probabilités de premier niveau sont :

$$P(M_1) = 0{,}60, \qquad P(M_2) = 0{,}40.$$

Les probabilités conditionnelles sont :

$$P_{M_1}(D) = 0{,}02, \qquad P_{M_2}(D) = 0{,}05.$$

Les probabilités des branches complémentaires sont :

$$P_{M_1}(\overline{D}) = 0{,}98, \qquad P_{M_2}(\overline{D}) = 0{,}95.$$

2. Probabilité d'obtenir une pièce défectueuse

Les événements M_1 et M_2 forment une partition de l'univers. La formule des probabilités totales donne :

$$\begin{aligned} P(D) &= P(M_1)P_{M_1}(D) + P(M_2)P_{M_2}(D) \\ &= 0{,}60 \times 0{,}02 + 0{,}40 \times 0{,}05 \\ &= 0{,}012 + 0{,}020 \\ &= 0{,}032. \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{P(D) = 3{,}2\,\%.}$$

3. Probabilité conditionnelle

On cherche $P_D(M_2)$. Par définition :

$$P_D(M_2) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)}.$$

Or :

$$P(M_2 \cap D) = P(M_2)P_{M_2}(D) = 0{,}40 \times 0{,}05 = 0{,}020.$$

Par conséquent :

$$P_D(M_2) = \frac{0{,}020}{0{,}032} = \frac{5}{8} = 0{,}625.$$

Donc :

$$\boxed{P_D(M_2) = 62{,}5\,\%.}$$

Bien que la machine M_2 ne produise que $40\,\%$ des pièces, elle est à l'origine de $62{,}5\,\%$ des pièces défectueuses. Cette différence s'explique par son taux de défaut plus élevé.

8 Aspects didactiques et pédagogiques

8.1 Progression pédagogique

Une progression possible au lycée peut suivre les étapes suivantes :

1. Expériences concrètes : dés, pièces, cartes ou tirages.

2. Identification de l'univers et des événements.
3. Calcul de probabilités dans des situations d'équiprobabilité.
4. Introduction de la probabilité conditionnelle à partir d'une information nouvelle.
5. Utilisation des arbres pondérés et de la formule des probabilités totales.
6. Résolution de problèmes mobilisant la formule de Bayes et l'indépendance, selon le niveau visé.

8.2 Difficultés fréquentes des élèves

Plusieurs difficultés peuvent être anticipées :

— confondre $P(A \cap B)$ et $P(A \cup B)$;
— appliquer la formule d'équiprobabilité sans vérifier l'équiprobabilité des issues ;
— inverser $P_B(A)$ et $P_A(B)$;
— oublier de diviser par $P(B)$ dans une probabilité conditionnelle ;
— confondre incompatibilité et indépendance ;
— oublier que les probabilités des branches issues d'un même sommet d'un arbre ont une somme égale à 1.

8.3 Pistes de remédiation

Pour remédier à ces difficultés, on peut :

— faire verbaliser les événements avant tout calcul ;
— utiliser des tableaux à double entrée ;
— faire comparer les fréquences observées lors de simulations et les probabilités théoriques ;
— demander aux élèves d'interpréter le numérateur et le dénominateur d'une probabilité conditionnelle ;
— proposer des contre-exemples pour distinguer indépendance et incompatibilité.

9 Conclusion

La théorie des probabilités fournit un cadre mathématique pour modéliser l'incertitude.

L'expérience aléatoire conduit à la définition d'un univers et d'événements. Une probabilité quantifie la réalisation de ces événements. La probabilité conditionnelle permet ensuite de tenir compte d'une information supplémentaire.

Les formules des probabilités composées, des probabilités totales et de Bayes constituent des outils essentiels pour résoudre des problèmes faisant intervenir plusieurs étapes ou plusieurs causes.

L'indépendance précise enfin les situations dans lesquelles la connaissance d'un événement ne modifie pas la probabilité d'un autre.

Pour l'oral du CAPES, il est important de maîtriser les définitions, de justifier les hypothèses des théorèmes, de proposer des exemples adaptés au niveau scolaire et de mettre en évidence les erreurs classiques que l'enseignement doit permettre de dépasser.

Références bibliographiques

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. `https://www.education.gouv.fr/`

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement pour les programmes de mathématiques du lycée*, Éduscol. `https://eduscol.education.fr/`

[3] Antoine Monfort, *Cours de probabilités*, Éditions de l'École polytechnique.

[4] Dominique Foata et Aimé Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod.

[5] Jean Jacod et Philip Protter, *Probability Essentials*, Springer.

[6] Geoffrey Grimmett et David Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press.

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports des jurys du CAPES externe de mathématiques*, site Devenir enseignant. `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/`