Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Variable aléatoire discrète

Table des matières

1 Introduction et problématique **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
- 2.1 Prérequis . . . 2
- 2.2 Objectifs . . . 2
- 2.3 Compétences mobilisées . . . 3

3 Variable aléatoire discrète **3**
- 3.1 Rappels sur les expériences aléatoires . . . 3
- 3.2 Définition . . . 3
- 3.3 Loi de probabilité . . . 4
- 3.4 Fonction de répartition . . . 4

4 Calcul de probabilités **4**
- 4.1 Probabilité d'un événement défini par X . . . 4
- 4.2 Exemple de calcul . . . 4

5 Espérance mathématique **5**
- 5.1 Définition . . . 5
- 5.2 Interprétation . . . 5
- 5.3 Propriétés de l'espérance . . . 5

6 Variance et écart-type **6**
- 6.1 Définition . . . 6
- 6.2 Propriétés . . . 6

7 Lois discrètes usuelles **6**
- 7.1 Loi de Bernoulli . . . 6
- 7.2 Loi binomiale . . . 7
- 7.3 Loi géométrique . . . 7
- 7.4 Loi de Poisson . . . 7

8 Fonctions de variables aléatoires **8**

9 Inégalités de concentration **8**
- 9.1 Inégalité de Markov . . . 8
- 9.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev . . . 8

10 Exemple de synthèse **8**
- 10.1 Loi de probabilité . . . 9
- 10.2 Espérance . . . 9
- 10.3 Variance . . . 9
- 10.4 Modification du jeu . . . 9

11 Pistes pédagogiques et didactiques **9**
11.1 Place dans les programmes 9
11.2 Activité introductive possible 10
11.3 Difficultés fréquentes 10

12 Conclusion **10**

1 Introduction et problématique

La notion de variable aléatoire permet de traduire une expérience aléatoire en un objet numérique. Elle rend possible l'étude quantitative des phénomènes incertains et fournit des outils pour calculer des probabilités, mesurer une valeur moyenne et évaluer la dispersion des résultats.

Une variable aléatoire discrète prend ses valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable.

La problématique de cette leçon est la suivante :

> Comment associer une loi de probabilité à une grandeur numérique issue d'une expérience aléatoire, puis utiliser cette loi pour étudier son comportement ?

La leçon s'organise autour de trois questions :

— Comment définir et caractériser une variable aléatoire discrète ?

— Comment calculer ses probabilités et ses paramètres numériques ?

— Comment utiliser ces outils pour résoudre des problèmes concrets ?

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La compréhension de cette leçon suppose que les notions suivantes soient acquises :

— expérience aléatoire, univers et événement ;

— probabilités d'événements, événement contraire et réunion d'événements incompatibles ;

— calcul de probabilités dans des situations d'équiprobabilité ;

— dénombrement élémentaire, notamment les combinaisons ;

— calcul algébrique, sommes finies et manipulation des expressions comportant des puissances ;

— notion de moyenne pondérée et lecture de tableaux de données.

Selon le niveau d'enseignement considéré, les élèves peuvent également avoir déjà étudié les expériences de Bernoulli et la loi binomiale.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette étude, les élèves doivent être capables de :

— définir une variable aléatoire discrète associée à une expérience aléatoire ;

— déterminer ses valeurs possibles et construire sa loi de probabilité ;

— vérifier qu'une distribution donnée définit une loi de probabilité ;

— calculer des probabilités du type $\mathbb{P}(X \in A)$ à partir de la loi de X ;

— déterminer et interpréter l'espérance d'une variable aléatoire discrète ;

— calculer sa variance et son écart-type ;

— reconnaître et utiliser certaines lois discrètes usuelles, notamment les lois de Bernoulli et binomiale ;

— modéliser une situation concrète, par exemple un jeu de hasard, à l'aide d'une variable aléatoire ;

— interpréter les résultats obtenus et, lorsque cela est pertinent, les confronter à une simulation.

2.3 Compétences mobilisées

Cette leçon permet de travailler plusieurs compétences mathématiques :

— **Chercher :** identifier les issues pertinentes et construire un modèle probabiliste ;

— **Modéliser :** traduire une situation concrète en termes de variable aléatoire et de loi de probabilité ;

— **Calculer :** déterminer des probabilités, une espérance et une variance ;

— **Représenter :** organiser les résultats dans un tableau ou une représentation graphique ;

— **Raisonner :** justifier les calculs et vérifier la cohérence des résultats ;

— **Communiquer :** interpréter les paramètres numériques dans le contexte étudié.

3 Variable aléatoire discrète

3.1 Rappels sur les expériences aléatoires

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu avec certitude.

On appelle *univers* l'ensemble Ω des résultats possibles. Une probabilité $\mathbb{P}$ associe à chaque événement A un nombre $\mathbb{P}(A)$ vérifiant les axiomes usuels :

$$\mathbb{P}(A) \geq 0, \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1,$$

et, pour des événements deux à deux disjoints,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n).$$

3.2 Définition

Définition 3.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Une variable aléatoire réelle discrète est une application

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

dont l'ensemble des valeurs possibles

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

est fini ou dénombrable, et telle que les événements $\{X = x_i\}$ soient mesurables.

Pour chaque valeur x_i, on définit

$$p_i = \mathbb{P}(X = x_i).$$

Les nombres p_i sont les probabilités ponctuelles de la variable aléatoire X.

Propriété 3.2. *Les probabilités ponctuelles vérifient*

$$p_i \geq 0 \qquad \textit{et} \qquad \sum_i p_i = 1.$$

3.3 Loi de probabilité

Définition 3.3. La loi de probabilité d'une variable aléatoire discrète est la donnée de ses valeurs possibles et des probabilités associées à chacune d'elles.

On peut représenter une loi par un tableau :

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\cdots$	p_n

Dans le cas d'un ensemble de valeurs dénombrable, le tableau peut être infini.

Exemple 3.4. On lance un dé équilibré à six faces et on note X le résultat obtenu.

La loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{6}, \qquad k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

3.4 Fonction de répartition

Définition 3.5. La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

Elle est croissante, continue à droite, et vérifie

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Pour une variable discrète, sa fonction de répartition est une fonction en escalier. Ses sauts sont situés aux valeurs prises par la variable et leur amplitude vaut $\mathbb{P}(X = x_i)$.

On retrouve les probabilités ponctuelles par

$$\mathbb{P}(X = x) = F_X(x) - F_X(x^-),$$

où $F_X(x^-)$ désigne la limite à gauche de F_X en x.

4 Calcul de probabilités

4.1 Probabilité d'un événement défini par X

Pour tout ensemble $B \subseteq \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X \in B) = \sum_{x_i \in B} \mathbb{P}(X = x_i).$$

En particulier, si $a \leq b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x_i \leq b} p_i.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a).$$

4.2 Exemple de calcul

On considère la loi suivante :

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,25	0,15

La somme des probabilités vaut bien 1.

On obtient :

$$\mathbb{P}(X \geq 2) = 0{,}3 + 0{,}25 + 0{,}15 = 0{,}7,$$

et

$$\mathbb{P}(1 \leq X \leq 3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}25 = 0{,}75.$$

5 Espérance mathématique

5.1 Définition

Définition 5.1. Si X prend un nombre fini de valeurs x_i, son espérance est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i \mathbb{P}(X = x_i).$$

Pour une variable discrète à valeurs dénombrables, cette définition s'étend lorsque

$$\sum_i |x_i| \mathbb{P}(X = x_i) < +\infty.$$

On dit alors que X est intégrable.

L'espérance est une moyenne pondérée par les probabilités.

5.2 Interprétation

L'espérance représente la valeur moyenne théorique des résultats lorsqu'on répète un grand nombre de fois la même expérience dans les mêmes conditions.

Elle ne correspond pas nécessairement à une valeur que la variable peut effectivement prendre.

Exemple 5.2. Pour un dé équilibré,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

L'espérance vaut 3,5, bien que cette valeur ne puisse pas être obtenue lors d'un lancer.

5.3 Propriétés de l'espérance

Propriété 5.3 (Linéarité)**.** *Si X et Y sont intégrables et $a, b \in \mathbb{R}$, alors*

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y).$$

En particulier,

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b.$$

La linéarité ne nécessite pas que X et Y soient indépendantes.

Propriété 5.4 (Monotonie)**.** *Si $X \leq Y$ presque sûrement et si les deux variables sont intégrables, alors*

$$\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y).$$

Propriété 5.5 (Espérance d'une fonction)**.** *Pour toute fonction g telle que $g(X)$ soit intégrable,*

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i).$$

Cette formule permet notamment de calculer $\mathbb{E}(X^2)$ sans déterminer la loi de probabilité d'une nouvelle variable.

6 Variance et écart-type

6.1 Définition

Définition 6.1. Si $\mathbb{E}(X^2)$ est finie, la variance de X est

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

Elle s'écrit aussi

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i.$$

Propriété 6.2 (Formule de König-Huygens)**.**

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \left(\mathbb{E}(X)\right)^2.}$$

Cette formule est souvent plus pratique pour effectuer les calculs.

Définition 6.3. L'écart-type de X est

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

La variance mesure la dispersion autour de l'espérance. L'écart-type s'exprime dans la même unité que X.

6.2 Propriétés

Pour toute constante $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \,\mathrm{Var}(X).$$

En particulier,

$$\mathrm{Var}(X + b) = \mathrm{Var}(X), \qquad \mathrm{Var}(aX) = a^2 \,\mathrm{Var}(X).$$

La variance est toujours positive ou nulle :

$$\mathrm{Var}(X) \geq 0.$$

Elle est nulle si et seulement si X est constante presque sûrement.
Pour deux variables aléatoires de variance finie,

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X, Y),$$

où

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y).$$

Si X et Y sont indépendantes, leur covariance est nulle, et donc

$$\mathrm{Var}(X + Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

7 Lois discrètes usuelles

7.1 Loi de Bernoulli

Définition 7.1. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$ si

$$\mathbb{P}(X = 1) = p, \qquad \mathbb{P}(X = 0) = 1 - p.$$

On note $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Le résultat 1 représente généralement le succès et le résultat 0 l'échec.
Son espérance est

$$\mathbb{E}(X) = p.$$

Comme $X^2 = X$,

$$\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p(1 - p).$$

7.2 Loi binomiale

Définition 7.2. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$ si elle compte le nombre de succès dans n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre p. On note

$$X \sim \mathcal{B}(n,p).$$

Pour $k \in \{0,\dots,n\}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Ses paramètres numériques sont

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).}$$

L'écart-type vaut

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Exemple 7.3. On lance dix fois un dé équilibré et on compte le nombre de fois où apparaît un six.

La variable X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(10, \frac{1}{6})$, d'où

$$\mathbb{E}(X) = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}.$$

7.3 Loi géométrique

On considère des épreuves de Bernoulli indépendantes, de probabilité de succès $p \in]0,1]$. La variable X désigne le rang du premier succès.

Alors, pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1} p.$$

La variable X suit une loi géométrique de paramètre p, avec la convention retenue ici d'un comptage à partir de 1.

On a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.}$$

Cette loi possède la propriété d'absence de mémoire :

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > m) = \mathbb{P}(X > n),$$

pour $m, n \in \mathbb{N}$.

7.4 Loi de Poisson

Définition 7.4. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \qquad k \in \mathbb{N}.$$

On note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

On a

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda, \qquad \mathrm{Var}(X) = \lambda.}$$

Cette loi peut modéliser le nombre d'événements observés dans un intervalle donné, sous des hypothèses adaptées.

Elle intervient également comme approximation d'une loi binomiale lorsque n est grand, p est petit et np reste proche d'une constante λ.

8 Fonctions de variables aléatoires

Soit X une variable aléatoire discrète et g une fonction réelle. La variable $Y = g(X)$ est encore discrète.

Pour déterminer sa loi, on regroupe les valeurs de X qui ont la même image :

$$\mathbb{P}(Y = y) = \sum_{\{x_i \,:\, g(x_i)=y\}} \mathbb{P}(X = x_i).$$

Il est important de ne pas supposer que g est injective.

On dispose ensuite de la formule

$$\mathbb{E}(g(X)) = \sum_i g(x_i)p_i,$$

lorsque cette espérance existe.

En revanche, en général,

$$\mathbb{E}(g(X)) \neq g(\mathbb{E}(X)).$$

Exemple 8.1. On reprend un dé équilibré et on pose $Y = X^2$. Alors

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X^2) = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + 6^2}{6} = \frac{91}{6}.$$

En revanche,

$$(\mathbb{E}(X))^2 = \frac{49}{4}.$$

Ces deux nombres sont différents.

9 Inégalités de concentration

9.1 Inégalité de Markov

Théorème 9.1 (Markov)**.** *Si X est une variable aléatoire positive et intégrable, alors, pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}.$$

Cette inégalité donne une majoration d'une probabilité à partir de la seule espérance.

9.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Théorème 9.2 (Bienaymé-Tchebychev)**.** *Si X admet une variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\boxed{\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.}$$

Cette inégalité permet de contrôler la probabilité d'un écart important par rapport à l'espérance.

Elle constitue un outil fondamental pour démontrer la loi faible des grands nombres.

10 Exemple de synthèse

On considère un jeu dans lequel un joueur lance un dé équilibré. Il gagne 5 euros si le résultat est 6, et perd 1 euro sinon.

On note X le gain algébrique du joueur.

10.1 Loi de probabilité

La variable X prend les valeurs 5 et -1 :

x	-1	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$

10.2 Espérance

On calcule

$$\mathbb{E}(X) = (-1)\frac{5}{6} + 5\frac{1}{6} = 0.$$

Le jeu est équitable au sens où son espérance de gain est nulle.

Cela ne signifie pas que chaque joueur obtient un gain nul, ni que les gains et les pertes se compensent nécessairement sur un petit nombre de parties.

10.3 Variance

On a

$$\mathbb{E}(X^2) = (-1)^2\frac{5}{6} + 5^2\frac{1}{6} = \frac{30}{6} = 5.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 = 5.$$

L'écart-type vaut donc

$$\sigma(X) = \sqrt{5}.$$

10.4 Modification du jeu

Supposons maintenant que le joueur paie une mise de 2 euros avant chaque lancer, en plus du gain ou de la perte précédemment défini. Son gain net est

$$Y = X - 2.$$

Par linéarité,

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X) - 2 = -2.$$

La variance ne change pas :

$$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = 5.$$

Le jeu modifié présente donc un gain moyen de -2 euros par partie.

11 Pistes pédagogiques et didactiques

11.1 Place dans les programmes

Les variables aléatoires discrètes permettent de faire le lien entre probabilités, fonctions numériques, statistiques et résolution de problèmes.

Selon le niveau considéré, on peut travailler sur :

— la construction et la lecture d'une loi de probabilité ;

— le calcul de probabilités à partir d'un tableau ;

— l'espérance et l'interprétation d'un gain moyen ;

— la variance et l'écart-type ;

— les lois de Bernoulli et binomiale ;

— la simulation informatique d'expériences aléatoires.

11.2 Activité introductive possible

On propose aux élèves un jeu simple : tirer une carte dans un jeu réduit, lancer un dé ou effectuer plusieurs tirages avec remise.

Les élèves doivent :

1. définir la variable aléatoire associée ;
2. identifier les valeurs possibles ;
3. déterminer la probabilité de chaque valeur ;
4. calculer l'espérance du gain ;
5. discuter de l'équité du jeu.

La simulation informatique peut ensuite permettre de comparer le gain moyen observé à l'espérance théorique.

11.3 Difficultés fréquentes

Les erreurs courantes sont notamment :

— confondre une valeur possible et sa probabilité ;
— oublier de vérifier que la somme des probabilités vaut 1 ;
— confondre espérance et valeur la plus probable ;
— croire que l'espérance est nécessairement une valeur prise par la variable ;
— confondre variance et écart-type ;
— supposer à tort que l'espérance d'une fonction est la fonction de l'espérance ;
— utiliser une loi binomiale sans vérifier l'indépendance et l'identité des probabilités de succès.

12 Conclusion

Une variable aléatoire discrète associe une valeur numérique à chaque résultat d'une expérience aléatoire. Sa loi de probabilité décrit les valeurs possibles et leurs probabilités.

L'espérance fournit une mesure de tendance centrale, tandis que la variance et l'écart-type renseignent sur la dispersion.

Les lois usuelles, notamment les lois de Bernoulli, binomiale, géométrique et de Poisson, permettent de modéliser de nombreuses situations concrètes.

Enfin, les inégalités de concentration et les méthodes de simulation permettent d'aller au-delà du calcul ponctuel des probabilités et de comprendre le comportement des résultats aléatoires.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques du lycée*, Éduscol. https://eduscol.education.fr/

[3] A. Monfort, *Cours de mathématiques : probabilités*, référence bibliographique à compléter selon l'édition retenue.

[4] D. Foata et A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris.

[5] J. Jacod et P. Protter, *Probability Essentials*, Springer, Berlin.

[6] G. R. Grimmett et D. R. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, Oxford University Press.

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports des jurys du CAPES de mathématiques*, site officiel du ministère. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/