Leçon d'oral du CAPES

Loi binomiale

Probabilités – Variables aléatoires discrètes

Table des matières

1 Introduction et problématique **3**

2 Prérequis et objectifs **3**

2.1 Prérequis . . . 3

2.2 Objectifs de la leçon . . . 3

2.3 Objectifs de formation pour le futur enseignant . . . 4

3 Rappels **4**

3.1 Expérience aléatoire . . . 4

3.2 Variable aléatoire discrète . . . 4

3.3 Coefficient binomial . . . 4

4 Expérience de Bernoulli et schéma de Bernoulli **4**

4.1 Épreuve de Bernoulli . . . 4

4.2 Variable indicatrice du succès . . . 5

4.3 Schéma de Bernoulli . . . 5

5 Définition et loi de probabilité binomiale **5**

5.1 Calcul de la loi . . . 6

5.2 Vérification de la somme des probabilités . . . 6

5.3 Cas particuliers . . . 6

6 Espérance, variance et écart-type **6**

6.1 Espérance . . . 6

6.2 Variance . . . 7

6.3 Écart-type . . . 7

6.4 Résumé des formules . . . 7

7 Exemple détaillé **8**

7.1 Probabilité d'obtenir exactement deux six . . . 8

7.2 Probabilité d'obtenir au moins un six . . . 8

7.3 Espérance et écart-type . . . 8

8 Calculs de probabilités cumulées **9**

9 Une autre propriété : relation de récurrence **9**

10 Applications et choix du modèle **9**
10.1 Contrôle de qualité 9
10.2 Sondage 10

11 Limites et prolongements **10**
11.1 Conditions d'utilisation 10
11.2 Approximation par une loi de Poisson 10
11.3 Approximation par une loi normale 10

12 Exercices possibles à l'oral **10**

13 Conclusion **11**

1 Introduction et problématique

La loi binomiale est un modèle fondamental des probabilités. Elle permet de décrire le nombre de succès obtenus lors de la répétition d'un nombre fixé d'expériences aléatoires indépendantes, lorsque chaque expérience possède deux issues possibles : le succès et l'échec.

Elle intervient notamment dans les contrôles de qualité, les sondages, les jeux de hasard et l'étude de phénomènes biologiques.

Problématique : comment modéliser le nombre de succès obtenus au cours de n répétitions indépendantes d'une même expérience de Bernoulli, et comment calculer ses probabilités, son espérance et sa variance ?

Le plan de la leçon est le suivant :

1. Expérience de Bernoulli et schéma de Bernoulli ;
2. Définition et loi de probabilité binomiale ;
3. Espérance, variance et écart-type ;
4. Exemples d'application et prolongements.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La compréhension de la loi binomiale nécessite les connaissances suivantes :

— **Probabilités :** univers, événements, probabilité d'un événement, événement contraire et événements incompatibles ;
— **Probabilités conditionnelles et indépendance :** comprendre l'indépendance de plusieurs épreuves aléatoires ;
— **Épreuve de Bernoulli :** identifier un succès, un échec et la probabilité associée au succès ;
— **Dénombrement :** calculer un coefficient binomial $\binom{n}{k}$ et interpréter ce coefficient comme le nombre de choix de k positions parmi n ;
— **Variables aléatoires discrètes :** déterminer une loi de probabilité et calculer une espérance et une variance ;
— **Calcul algébrique :** manipuler les puissances, les factorielles et la formule du binôme de Newton.

2.2 Objectifs de la leçon

À l'issue de cette leçon, un élève doit être capable de :

— reconnaître une situation pouvant être modélisée par un schéma de Bernoulli ;
— justifier les hypothèses nécessaires à l'utilisation d'une loi binomiale : nombre fixé d'épreuves, indépendance et probabilité de succès constante ;
— définir une variable aléatoire suivant une loi binomiale et identifier ses paramètres n et p ;
— utiliser la formule

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

pour calculer une probabilité ;
— calculer des probabilités cumulées, notamment $\mathbb{P}(X \leq k)$ et $\mathbb{P}(X \geq k)$, en utilisant si nécessaire l'événement contraire ;

— connaître et interpréter l'espérance, la variance et l'écart-type d'une loi binomiale :

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p), \qquad \sigma(X) = \sqrt{np(1-p)};$$

— utiliser une calculatrice ou un logiciel pour effectuer des calculs de probabilités binomiales et interpréter les résultats obtenus ;
— discuter la pertinence du modèle binomial dans une situation concrète et identifier ses limites.

2.3 Objectifs de formation pour le futur enseignant

Dans le cadre de la préparation à l'oral du CAPES, le candidat doit également être capable de :

— présenter une progression cohérente, de l'épreuve de Bernoulli à la loi binomiale ;
— justifier la formule de la loi binomiale en mobilisant l'indépendance et le dénombrement ;
— démontrer les formules de l'espérance et de la variance à partir de la décomposition en variables indicatrices ;
— proposer des exemples contextualisés et des exercices adaptés au niveau d'enseignement visé ;
— distinguer les résultats théoriques, leur interprétation et leur mise en œuvre numérique.

3 Rappels

3.1 Expérience aléatoire

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat ne peut pas être prévu avec certitude, même si les résultats possibles sont connus.

On appelle **univers** l'ensemble des issues possibles de cette expérience.

3.2 Variable aléatoire discrète

Une variable aléatoire réelle X est une fonction qui associe un nombre réel à chaque issue de l'expérience aléatoire.

Si X ne prend qu'un nombre fini ou dénombrable de valeurs, on parle de variable aléatoire discrète.

La loi de X est déterminée par les probabilités $\mathbb{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs possibles de k.

3.3 Coefficient binomial

Pour $0 \leq k \leq n$, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments. Il vaut

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Il compte également le nombre de façons de choisir les k positions des succès parmi n expériences.

4 Expérience de Bernoulli et schéma de Bernoulli

4.1 Épreuve de Bernoulli

Définition 1. *Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui possède exactement deux issues possibles :*

— *le succès, de probabilité* p *;*
— *l'échec, de probabilité* $1-p$*.*

Le paramètre p *vérifie* $0 \leq p \leq 1$*.*

Exemple : on lance un dé équilibré et l'on considère comme un succès l'obtention d'un six. Alors

$$p = \frac{1}{6}, \qquad 1-p = \frac{5}{6}.$$

4.2 Variable indicatrice du succès

On définit la variable aléatoire X par

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si le succès est obtenu,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Sa loi est

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$1-p$	p

Cette variable suit une loi de Bernoulli de paramètre p, notée $\mathcal{B}(p)$.

4.3 Schéma de Bernoulli

Définition 2. *Un schéma de Bernoulli de paramètres* n *et* p *est une succession de* n *épreuves de Bernoulli indépendantes, ayant toutes la même probabilité de succès* p*.*

L'indépendance signifie que le résultat d'une épreuve ne modifie pas la probabilité des résultats des autres épreuves.

On note X_i la variable indicatrice du succès lors de la i-ième épreuve :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la } i\text{-ième épreuve est un succès,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes une loi de Bernoulli de paramètre p.

Le nombre total de succès est

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

5 Définition et loi de probabilité binomiale

Définition 3. *Soit un schéma de Bernoulli de paramètres* n *et* p*. La variable aléatoire* S_n*, qui compte le nombre de succès obtenus au cours des* n *épreuves, suit une loi binomiale de paramètres* n *et* p*.*

On note

$$S_n \sim \mathcal{B}(n,p).$$

5.1 Calcul de la loi

Théorème 1. *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$,*

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.}$$

Démonstration. Pour obtenir exactement k succès au cours des n épreuves, il faut choisir les k positions des succès.

Il existe $\binom{n}{k}$ choix possibles.

Pour une configuration donnée, l'indépendance des épreuves donne une probabilité égale à

$$p^k (1-p)^{n-k},$$

car elle comporte k succès et $n-k$ échecs.

Les configurations correspondant à des ensembles différents de positions des succès sont incompatibles. En additionnant leurs probabilités, on obtient

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

□

5.2 Vérification de la somme des probabilités

La formule du binôme de Newton donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1.$$

La somme des probabilités vaut donc bien 1.

5.3 Cas particuliers

— Pour $k = 0$:

$$\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n.$$

— Pour $k = n$:

$$\mathbb{P}(X=n) = p^n.$$

— Pour $n = 1$, la loi binomiale $\mathcal{B}(1,p)$ est la loi de Bernoulli de paramètre p.

6 Espérance, variance et écart-type

6.1 Espérance

Théorème 2. *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = np.}$$

Démonstration. On écrit X comme somme des variables indicatrices :

$$X = X_1 + \cdots + X_n.$$

Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p, donc

$$\mathbb{E}(X_i) = 0(1-p) + 1p = p.$$

Par linéarité de l'espérance,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i) = np.$$

□

L'espérance représente le nombre moyen de succès que l'on peut attendre sur un grand nombre de répétitions du même schéma de Bernoulli.

6.2 Variance

Théorème 3. *Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors*

$$\boxed{\mathrm{Var}(X) = np(1-p).}$$

Démonstration. Pour une variable de Bernoulli X_i,

$$\mathbb{E}(X_i^2) = p,$$

puisque $X_i^2 = X_i$. Ainsi,

$$\mathrm{Var}(X_i) = \mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2 = p - p^2 = p(1-p).$$

Les variables $X_1, \ldots, X_n$ étant indépendantes, la variance de leur somme est la somme de leurs variances :

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}(X_i) = np(1-p).$$

□

6.3 Écart-type

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs de X autour de son espérance :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}.}$$

6.4 Résumé des formules

Pour $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= np, \\ \mathrm{Var}(X) &= np(1-p), \\ \sigma(X) &= \sqrt{np(1-p)}. \end{aligned}}$$

7 Exemple détaillé

On lance dix fois un dé équilibré. On appelle succès l'obtention d'un six. On suppose les lancers indépendants.

Soit X le nombre de six obtenus.

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$. Le nombre de lancers est $n = 10$. Ainsi,

$$X \sim \mathcal{B}\left(10, \frac{1}{6}\right).$$

7.1 Probabilité d'obtenir exactement deux six

On applique la formule de la loi binomiale :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 2) &= \binom{10}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^8 \\ &= 45 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{390625}{1679616}.\end{aligned}$$

Numériquement,

$$\boxed{\mathbb{P}(X = 2) \approx 0{,}291.}$$

7.2 Probabilité d'obtenir au moins un six

Il est plus simple de calculer la probabilité de l'événement contraire :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geq 1) &= 1 - \mathbb{P}(X = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \geq 1) \approx 0{,}838.}$$

7.3 Espérance et écart-type

L'espérance vaut

$$\mathbb{E}(X) = 10 \times \frac{1}{6} = \frac{5}{3}.$$

La variance vaut

$$\mathrm{Var}(X) = 10 \times \frac{1}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{18}.$$

L'écart-type est donc

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{25}{18}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \approx 1{,}18.$$

Sur dix lancers, le nombre moyen de six est $\frac{5}{3}$, soit environ 1,67.

8 Calculs de probabilités cumulées

La loi binomiale permet également de calculer des probabilités cumulées.
Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, alors

$$\mathbb{P}(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

De même,

$$\mathbb{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}.$$

On utilise souvent l'événement contraire :

$$\mathbb{P}(X \geq k) = 1 - \mathbb{P}(X \leq k-1).$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n.$$

Ces formules sont utiles lorsque l'on étudie un nombre minimal ou maximal de succès.

9 Une autre propriété : relation de récurrence

Pour $0 \leq k < n$, lorsque $0 < p < 1$, les probabilités successives vérifient

$$\boxed{\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.}$$

En effet,

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} &= \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} \frac{p^{k+1}}{p^k} \frac{(1-p)^{n-k-1}}{(1-p)^{n-k}} \\ &= \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}.\end{aligned}$$

Cette relation permet de calculer les probabilités successives sans reprendre la formule complète à chaque fois.

10 Applications et choix du modèle

10.1 Contrôle de qualité

Une usine produit des pièces dont la probabilité d'être défectueuses est $p = 0{,}02$. On prélève au hasard $n = 50$ pièces, en supposant les états des pièces indépendants.
Le nombre X de pièces défectueuses suit alors

$$X \sim \mathcal{B}(50, 0{,}02).$$

La probabilité de ne trouver aucune pièce défectueuse est

$$\mathbb{P}(X=0) = (1-0{,}02)^{50} = 0{,}98^{50}.$$

On peut également calculer la probabilité de trouver au plus deux pièces défectueuses :

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \binom{50}{k} (0{,}02)^k (0{,}98)^{50-k}.$$

10.2 Sondage

Dans une population donnée, on suppose que chaque personne a une probabilité p de répondre favorablement à une question. Si les réponses de n personnes peuvent être modélisées comme indépendantes et si cette probabilité est identique pour toutes, le nombre de réponses favorables peut être modélisé par une loi binomiale.

Il convient de vérifier les hypothèses du modèle, notamment l'indépendance et la stabilité de la probabilité de succès.

11 Limites et prolongements

11.1 Conditions d'utilisation

Le modèle binomial suppose :

- un nombre fixé n d'épreuves ;
- deux issues possibles, succès ou échec ;
- une probabilité de succès p constante ;
- l'indépendance des épreuves.

Si les tirages sont effectués sans remise dans une petite population, l'indépendance n'est généralement pas vérifiée. Une loi hypergéométrique peut alors être plus adaptée.

11.2 Approximation par une loi de Poisson

Lorsque n est grand, p est petit et $\lambda = np$ reste modéré, la loi binomiale peut être approchée par une loi de Poisson de paramètre λ :

$$\mathbb{P}(X = k) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Cette approximation est particulièrement utile pour étudier des événements rares.

11.3 Approximation par une loi normale

Lorsque np et $n(1-p)$ sont suffisamment grands, la loi binomiale peut être approchée par une loi normale de moyenne np et de variance $np(1-p)$:

$$X \approx \mathcal{N}\big(np, np(1-p)\big).$$

Pour les calculs de probabilités, on peut utiliser une correction de continuité. Par exemple,

$$\mathbb{P}(X \leq k) \approx \mathbb{P}\left(Y \leq k + \frac{1}{2}\right),$$

où Y suit la loi normale correspondante.

Les conditions d'approximation doivent être examinées avant d'utiliser ces résultats.

12 Exercices possibles à l'oral

Exercice 1 : questions de cours

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
3. Interpréter l'événement $X \geq 1$.
4. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq 1)$.

Éléments de réponse :

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n,$$

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p),$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (1-p)^n.$$

Exercice 2 : application numérique

Un questionnaire comporte dix questions indépendantes. Pour chaque question, un candidat a une probabilité $p = 0{,}7$ de répondre correctement.

On note X le nombre de réponses correctes.

1. Justifier que X suit une loi binomiale.
2. Calculer la probabilité d'obtenir exactement sept bonnes réponses.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.
4. Exprimer la probabilité d'obtenir au moins une bonne réponse.

Éléments de réponse :

$$X \sim \mathcal{B}(10, 0{,}7).$$

$$\mathbb{P}(X = 7) = \binom{10}{7} (0{,}7)^7 (0{,}3)^3.$$

$$\mathbb{E}(X) = 7, \qquad \sigma(X) = \sqrt{10 \times 0{,}7 \times 0{,}3} = \sqrt{2{,}1}.$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - (0{,}3)^{10}.$$

13 Conclusion

La loi binomiale constitue le modèle de référence pour le dénombrement des succès lors de répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli.

Sa formule de probabilité repose sur deux idées : le dénombrement des configurations possibles par les coefficients binomiaux et le calcul de la probabilité d'une configuration par l'indépendance.

Les résultats essentiels à retenir sont

$$\boxed{\begin{array}{c} X \sim \mathcal{B}(n,p), \\ \\ \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \\ \\ \mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p). \end{array}}$$

La maîtrise de ce modèle suppose de savoir identifier un schéma de Bernoulli, justifier les hypothèses d'indépendance et de probabilité constante, puis choisir la formule adaptée à la question posée.

Références

[1] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability*, 2e édition, Chelsea Publishing Company, 1956.

[2] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume 1, 3e édition, John Wiley & Sons, 1968.

[3] G. Grimmett et D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3e édition, Oxford University Press, 2001.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement pour les programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Éduscol. https://eduscol.education.fr/

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES externe de mathématiques : programmes, sujets et rapports de jury*. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/

[7] *Loi binomiale*, Wikipédia, l'encyclopédie libre. https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_binomiale