Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Loi de Poisson, loi normale

Table des matières

1 Introduction et problématique **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
- 2.1 Prérequis . . . 2
- 2.2 Objectifs de la leçon . . . 2
- 2.3 Compétences mobilisées . . . 3

3 La loi de Poisson **3**
- 3.1 Définition . . . 3
- 3.2 Espérance et variance . . . 3
- 3.3 Fonction génératrice des probabilités . . . 4
- 3.4 Stabilité par somme . . . 4
- 3.5 Interprétation : le processus de Poisson . . . 5
- 3.6 Limite et approximation d'une loi binomiale . . . 5

4 La loi normale **6**
- 4.1 Définition . . . 6
- 4.2 Espérance et variance . . . 6
- 4.3 La loi normale centrée réduite . . . 7
- 4.4 Fonction de répartition . . . 7
- 4.5 Intervalles de concentration usuels . . . 7
- 4.6 Stabilité par combinaison linéaire . . . 8

5 Le théorème central limite **8**
- 5.1 Énoncé . . . 8
- 5.2 Approximation de la loi binomiale . . . 8
- 5.3 Correction de continuité . . . 9
- 5.4 Approximation normale de la loi de Poisson . . . 9

6 Comparaison des deux lois **9**

7 Exemples d'applications **10**
- 7.1 Application à la loi de Poisson . . . 10
- 7.2 Application à la loi normale . . . 10
- 7.3 Application de l'approximation normale à une loi binomiale . . . 10

8 Pistes pédagogiques **11**
- 8.1 Objectifs d'apprentissage . . . 11
- 8.2 Démarche possible en classe . . . 11
- 8.3 Erreurs fréquentes à prévenir . . . 11

9 Conclusion **11**

Questions possibles du jury **12**

Références bibliographiques **12**

1 Introduction et problématique

Les lois de probabilité permettent de modéliser des phénomènes aléatoires et de quantifier les risques associés.

Deux lois jouent un rôle important dans les applications :

— la loi de Poisson, adaptée notamment au dénombrement d'événements rares sur une durée ou dans une région donnée ;

— la loi normale, particulièrement importante pour modéliser des grandeurs continues et pour approcher certaines lois discrètes.

Ces deux lois sont liées à la loi binomiale : la loi de Poisson peut approcher une loi binomiale lorsque la probabilité de succès est faible, tandis que la loi normale peut approcher une loi binomiale lorsque les paramètres sont suffisamment grands.

Problématique : comment choisir entre ces deux lois, quelles sont leurs propriétés et dans quelles conditions peuvent-elles servir à approcher d'autres distributions ?

Le plan de la leçon est le suivant :

1. La loi de Poisson.
2. La loi normale.
3. Les liens entre les lois binomiale, de Poisson et normale.
4. Applications et prolongements pédagogiques.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La compréhension de cette leçon nécessite les connaissances suivantes :

— **Probabilités :** univers, événements, probabilité, indépendance de deux événements et formule des probabilités totales.

— **Variables aléatoires discrètes :** loi de probabilité, espérance, variance et écart-type.

— **Loi binomiale :** définition, formule des probabilités, espérance np et variance $np(1-p)$.

— **Analyse :** suites numériques, limites, exponentielle, intégrales et calcul de sommes.

— **Variables aléatoires à densité :** densité de probabilité, fonction de répartition et calcul de probabilités par intégration.

— **Outils numériques :** utilisation d'une calculatrice ou d'un logiciel pour déterminer des probabilités et comparer des distributions.

2.2 Objectifs de la leçon

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :

— définir la loi de Poisson et la loi normale, en précisant leurs paramètres et leurs supports ;

— établir les principales propriétés de ces lois, notamment leurs espérances et leurs variances ;

— interpréter les paramètres d'une loi de Poisson dans une situation de dénombrement et ceux d'une loi normale dans une situation de mesure ;

— expliquer la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson lorsque le nombre d'épreuves augmente, que la probabilité de succès diminue et que leur produit tend vers une constante positive ;

— utiliser la loi normale centrée réduite pour calculer des probabilités associées à une loi normale ;

— énoncer le théorème central limite et expliquer son rôle dans l'approximation normale de certaines distributions ;

— justifier le choix d'une approximation et en connaître les limites, notamment la correction de continuité pour une loi discrète ;

— modéliser une situation concrète, effectuer les calculs nécessaires et interpréter les résultats dans le contexte étudié.

2.3 Compétences mobilisées

Cette leçon mobilise les compétences suivantes :

— **Modéliser :** choisir une loi adaptée à une situation aléatoire ;

— **Représenter :** interpréter une loi à l'aide d'un tableau, d'un graphique ou d'une densité ;

— **Calculer :** déterminer des probabilités, des espérances et des variances ;

— **Raisonner :** justifier les hypothèses nécessaires à une approximation ;

— **Communiquer :** présenter une démarche probabiliste rigoureuse et interpréter les résultats.

3 La loi de Poisson

3.1 Définition

Définition 1. *Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire discrète X suit une loi de Poisson de paramètre λ si, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Le paramètre λ représente le nombre moyen d'événements sur l'intervalle considéré dans les modèles usuels.

La somme des probabilités vaut bien 1, car

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$$

3.2 Espérance et variance

Propriété 1. *Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = \lambda} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{\mathrm{Var}(X) = \lambda}.$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\
&= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.
\end{aligned}$$

Calculons ensuite le moment factoriel d'ordre deux :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X(X-1)) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\ &= \lambda^2.\end{aligned}$$

Or

$$X^2 = X(X-1) + X.$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(X^2) = \lambda^2 + \lambda.$$

Par conséquent,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

□

3.3 Fonction génératrice des probabilités

La fonction génératrice des probabilités de X est définie par

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X).$$

Pour une variable de loi de Poisson,

$$\begin{aligned}G_X(t) &= \sum_{k=0}^{+\infty} t^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \\ &= e^{-\lambda}e^{\lambda t} \\ &= \boxed{e^{\lambda(t-1)}}.\end{aligned}$$

Elle permet notamment de retrouver les moments :

$$G'_X(1) = \mathbb{E}(X) = \lambda$$

et

$$G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \lambda^2.$$

3.4 Stabilité par somme

Théorème 1. *Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes telles que*

$$X \sim \mathcal{P}(\lambda) \qquad \text{et} \qquad Y \sim \mathcal{P}(\mu),$$

alors

$$\boxed{X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)}.$$

Démonstration. Par indépendance,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

Donc

$$G_{X+Y}(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}.$$

C'est la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. □

3.5 Interprétation : le processus de Poisson

Un processus de Poisson homogène de taux $\rho > 0$ modélise le nombre $N(t)$ d'événements observés pendant une durée t, sous des hypothèses d'indépendance des accroissements et de stationnarité.

Dans ce modèle,

$$N(t) \sim \mathcal{P}(\rho t).$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}(N(t)) = \mathrm{Var}(N(t)) = \rho t.$$

Par exemple, si des appels arrivent selon un processus de Poisson de taux moyen 6 appels par heure, alors le nombre d'appels reçus en une demi-heure suit une loi de Poisson de paramètre

$$\lambda = 6 \times \frac{1}{2} = 3.$$

La probabilité de recevoir exactement deux appels est

$$\mathbb{P}(N(1/2) = 2) = e^{-3}\frac{3^2}{2!} = \frac{9}{2}e^{-3}.$$

La probabilité de ne recevoir aucun appel est

$$\mathbb{P}(N(1/2) = 0) = e^{-3}.$$

3.6 Limite et approximation d'une loi binomiale

Théorème 2 (Théorème de Poisson)**.** *Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que*

$$X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n),$$

avec

$$n \longrightarrow +\infty, \qquad p_n \longrightarrow 0, \qquad np_n \longrightarrow \lambda > 0.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}}.$$

La loi binomiale converge donc vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Idée de démonstration. Pour k fixé,

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}.$$

On écrit

$$\binom{n}{k} p_n^k = \frac{(np_n)^k}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

Le produit tend vers 1 et $(np_n)^k$ tend vers λ^k.

Par ailleurs,

$$(1-p_n)^n \longrightarrow e^{-\lambda}, \qquad (1-p_n)^{-k} \longrightarrow 1.$$

D'où le résultat. □

Exemple 1. *Une entreprise fabrique des pièces dont la probabilité d'être défectueuses est* $p = 0{,}002$. *On prélève* $n = 1000$ *pièces, en supposant les défauts indépendants.*

Le nombre X *de pièces défectueuses suit la loi* $\mathcal{B}(1000, 0{,}002)$. *Comme*

$$np = 1000 \times 0{,}002 = 2,$$

on peut approcher cette loi par $\mathcal{P}(2)$.

On obtient notamment

$$\mathbb{P}(X = 0) \approx e^{-2} \approx 0{,}1353$$

et

$$\mathbb{P}(X = 1) \approx 2e^{-2} \approx 0{,}2707.$$

Cette approximation est particulièrement utile lorsque n est grand, p faible et np modéré. Les critères numériques précis dépendent du niveau d'erreur acceptable.

4 La loi normale

4.1 Définition

Définition 2. *Une variable aléatoire réelle* X *suit une loi normale de paramètres* $m \in \mathbb{R}$ *et* $\sigma > 0$ *si elle admet pour densité*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

On note

$$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

Le paramètre m est la moyenne et σ^2 la variance. L'écart-type est σ.

La densité est positive, symétrique par rapport à la droite $x = m$ et son intégrale sur $\mathbb{R}$ vaut 1.

4.2 Espérance et variance

Propriété 2. *Si* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, *alors*

$$\boxed{\mathbb{E}(X) = m} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathrm{Var}(X) = \sigma^2}.$$

Démonstration. La densité de X est symétrique autour de m. En posant $u = x - m$, l'intégrale donnant l'espérance de $X - m$ est celle d'une fonction impaire intégrable. Elle est donc nulle :

$$\mathbb{E}(X - m) = 0,$$

d'où $\mathbb{E}(X) = m$.

Pour la variance,

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X-m)^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-m)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}\, dx.$$

Le changement de variable $u = (x - m)/\sigma$ donne

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2}\, du.$$

Une intégration par parties, avec la normalisation de la densité gaussienne, fournit

$$\int_{\mathbb{R}} u^2 e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}.$$

Ainsi, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$. □

4.3 La loi normale centrée réduite

Définition 3. *La loi normale centrée réduite est la loi $\mathcal{N}(0,1)$, de densité*

$$\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}}.$$

On note généralement $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Propriété 3. *Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors*

$$\boxed{Z = \frac{X - m}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)}.$$

Réciproquement, si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors

$$X = m + \sigma Z \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2).$$

Cette propriété permet de calculer toutes les probabilités associées à une loi normale à partir de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

4.4 Fonction de répartition

On définit

$$\Phi(x) = \mathbb{P}(Z \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

Il n'existe pas de primitive élémentaire de la densité gaussienne. Les valeurs de Φ sont obtenues par des tables, une calculatrice ou un logiciel.

La symétrie de la densité donne

$$\boxed{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}.$$

Pour $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$,

$$\boxed{\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - m}{\sigma}\right)}.$$

Pour $a < b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - m}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - m}{\sigma}\right).$$

Une variable à densité vérifie $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour tout a : les inégalités strictes ou larges donnent donc la même probabilité aux bornes.

4.5 Intervalles de concentration usuels

Pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, on a approximativement

$$\mathbb{P}(|Z| \leq 1) \approx 0{,}683,$$

$$\mathbb{P}(|Z| \leq 1{,}96) \approx 0{,}95,$$

$$\mathbb{P}(|Z| \leq 1{,}96) \approx 0{,}95, \qquad \mathbb{P}(|Z| \leq 3) \approx 0{,}997.$$

Plus précisément, l'intervalle centré en m de rayon $1{,}96\sigma$ contient environ $95\,\%$ de la probabilité :

$$\mathbb{P}(m - 1{,}96\sigma \leq X \leq m + 1{,}96\sigma) \approx 0{,}95.$$

Ces résultats permettent d'interpréter l'écart-type comme une mesure de dispersion autour de la moyenne.

4.6 Stabilité par combinaison linéaire

Théorème 3. *Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires normales indépendantes, avec*

$$X_i \sim \mathcal{N}(m_i, \sigma_i^2).$$

Pour des réels $a_1, \dots, a_n$, la variable

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i X_i$$

suit une loi normale de moyenne

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{n} a_i m_i$$

et de variance

$$\mathrm{Var}(S) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2.$$

En particulier, si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et suivent toutes la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}(nm, n\sigma^2).$$

L'indépendance est une hypothèse essentielle dans la formule de variance utilisée ici. La somme de variables normales indépendantes est normale ; plus généralement, la somme de variables conjointement normales est normale.

5 Le théorème central limite

5.1 Énoncé

Théorème 4 (Théorème central limite)**.** *Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, d'espérance m et de variance σ^2, avec $0 < \sigma^2 < +\infty$.*

On pose

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

Alors

$$\boxed{\frac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)}.$$

Ce théorème explique pourquoi la loi normale apparaît dans de nombreuses situations où l'on additionne un grand nombre de contributions aléatoires indépendantes.

Il ne signifie pas que toute somme finie de variables aléatoires est exactement normale.

5.2 Approximation de la loi binomiale

Soit $X \sim \mathcal{B}(n, p)$. On a

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathrm{Var}(X) = np(1-p).$$

Lorsque n est suffisamment grand et que p n'est pas trop proche de 0 ou de 1, on peut utiliser l'approximation

$$\boxed{X \approx \mathcal{N}(np, np(1-p))}.$$

Une règle pratique souvent rencontrée consiste à vérifier que np et $n(1-p)$ sont suffisamment grands, par exemple supérieurs ou égaux à 5 ou à 10 selon la précision recherchée. Ce sont des critères indicatifs, et non une garantie universelle de précision.

5.3 Correction de continuité

La loi binomiale est discrète, tandis que la loi normale est continue. Pour approcher une probabilité binomiale, on améliore souvent l'approximation en appliquant une correction de continuité.

Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et si $Y \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$, on utilise notamment

$$\mathbb{P}(X \leq k) \approx \mathbb{P}(Y \leq k + 0{,}5),$$

$$\mathbb{P}(X \geq k) \approx \mathbb{P}(Y \geq k - 0{,}5)$$

et

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) \approx \mathbb{P}(a - 0{,}5 \leq Y \leq b + 0{,}5).$$

Ces formules doivent être comprises comme des approximations.

5.4 Approximation normale de la loi de Poisson

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Comme

$$\mathbb{E}(X) = \mathrm{Var}(X) = \lambda,$$

on peut utiliser, lorsque λ est suffisamment grand, l'approximation

$$\boxed{X \approx \mathcal{N}(\lambda, \lambda)}.$$

La loi normale étant continue, on peut également appliquer une correction de continuité :

$$\mathbb{P}(X \leq k) \approx \Phi\left(\frac{k + 0{,}5 - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Cette approximation est surtout pertinente pour des valeurs de λ assez grandes. Pour de petits paramètres, l'asymétrie de la loi de Poisson peut rendre l'approximation normale médiocre.

6 Comparaison des deux lois

Critère	**Loi de Poisson**	**Loi normale**
Type	Discrète	Continue
Paramètres	$\lambda > 0$	$m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$
Support	$\mathbb{N}$	$\mathbb{R}$
Espérance	λ	m
Variance	λ	σ^2
Usages	Comptage d'événements	Grandeurs continues, sommes et approximations
Approximation caractéristique	Limite de la loi binomiale lorsque $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$	Limite donnée par le théorème central limite

La loi de Poisson est discrète et possède une asymétrie marquée pour les petits paramètres. Lorsque son paramètre augmente, sa distribution devient plus symétrique et l'approximation normale devient plus pertinente.

La loi normale est une loi continue, symétrique et entièrement déterminée par sa moyenne et sa variance.

7 Exemples d'applications

7.1 Application à la loi de Poisson

Un standard téléphonique reçoit en moyenne 4 appels par minute. On suppose que le nombre d'appels suit un processus de Poisson homogène.

Le nombre X d'appels reçus en une minute suit donc $\mathcal{P}(4)$.

La probabilité de recevoir exactement trois appels vaut

$$\mathbb{P}(X = 3) = e^{-4}\frac{4^3}{3!} = \frac{32}{3}e^{-4}.$$

La probabilité de recevoir au plus deux appels est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 2) &= \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 2)\\ &= e^{-4}\left(1 + 4 + \frac{4^2}{2}\right)\\ &= 13e^{-4}.\end{aligned}$$

Numériquement,

$$\mathbb{P}(X \leq 2) \approx 0{,}2381.$$

7.2 Application à la loi normale

La durée de fonctionnement d'un composant est modélisée par une variable aléatoire X suivant la loi

$$X \sim \mathcal{N}(1000, 100^2),$$

où les durées sont exprimées en heures.

On cherche la probabilité que la durée soit comprise entre 900 et 1100 heures.

En centrant et réduisant,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(900 \leq X \leq 1100) &= \mathbb{P}\left(\frac{900 - 1000}{100} \leq Z \leq \frac{1100 - 1000}{100}\right)\\ &= \mathbb{P}(-1 \leq Z \leq 1)\\ &= \Phi(1) - \Phi(-1)\\ &\approx 0{,}683.\end{aligned}$$

La probabilité recherchée est donc d'environ 68,3 %.

7.3 Application de l'approximation normale à une loi binomiale

Une machine produit des pièces dont la probabilité d'être défectueuses est 0,1. On contrôle 200 pièces, en supposant les défauts indépendants.

Le nombre X de pièces défectueuses suit

$$X \sim \mathcal{B}(200, 0{,}1).$$

On a

$$\mathbb{E}(X) = 20, \qquad \mathrm{Var}(X) = 18.$$

On approche cette loi par

$$Y \sim \mathcal{N}(20, 18).$$

Pour estimer la probabilité d'obtenir au plus 25 pièces défectueuses, la correction de continuité donne

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \leq 25) &\approx \mathbb{P}(Y \leq 25{,}5)\\ &= \Phi\left(\frac{25{,}5-20}{\sqrt{18}}\right)\\ &\approx \Phi(1{,}296)\\ &\approx 0{,}903.\end{aligned}$$

La valeur obtenue est une approximation ; on peut la comparer au calcul exact à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel.

8 Pistes pédagogiques

8.1 Objectifs d'apprentissage

Les élèves doivent pouvoir :

— reconnaître une situation relevant d'un modèle de Poisson ou d'un modèle normal ;

— calculer une probabilité à partir de la loi de Poisson ;

— centrer et réduire une variable normale ;

— exploiter la fonction de répartition Φ ;

— utiliser une approximation en justifiant ses conditions d'application ;

— interpréter un résultat probabiliste dans son contexte.

8.2 Démarche possible en classe

On peut commencer par une situation de comptage : nombre d'appels reçus pendant une durée donnée. Les élèves étudient alors la loi de Poisson et l'influence du paramètre λ.

On propose ensuite une situation de mesure, par exemple la taille d'une population ou une erreur de mesure, pour introduire la loi normale, sa densité et la standardisation.

Enfin, une simulation ou une représentation graphique permet de comparer une loi binomiale avec une loi de Poisson, puis avec une loi normale, en faisant varier les paramètres.

L'usage d'un tableur ou d'un logiciel de probabilités permet de confronter les approximations aux probabilités exactes.

8.3 Erreurs fréquentes à prévenir

— Confondre la variance et l'écart-type d'une loi normale.

— Oublier que la loi de Poisson est définie sur $\mathbb{N}$.

— Appliquer l'approximation de Poisson sans vérifier que p est faible et que np reste d'ordre modéré.

— Utiliser l'approximation normale sans examiner les paramètres ni la précision recherchée.

— Oublier la correction de continuité dans une approximation normale d'une loi discrète.

— Interpréter une approximation comme une égalité exacte.

9 Conclusion

La loi de Poisson et la loi normale constituent deux modèles fondamentaux des probabilités.

La loi de Poisson est adaptée au dénombrement d'événements rares et présente une propriété remarquable de stabilité par somme pour des variables indépendantes.

La loi normale intervient dans la modélisation de grandeurs continues et joue un rôle central dans le théorème central limite.

Leurs liens avec la loi binomiale expliquent leur importance dans les applications : la loi de Poisson décrit une limite de la loi binomiale dans le régime des événements rares, tandis que la loi normale fournit une approximation de nombreuses sommes et distributions lorsque les conditions asymptotiques sont satisfaites.

Le choix du modèle doit toujours être guidé par la nature du phénomène étudié, les hypothèses probabilistes et la précision attendue.

Questions possibles du jury

1. Pourquoi la loi de Poisson est-elle adaptée aux phénomènes de comptage ?
2. Comment démontrer que l'espérance et la variance d'une loi de Poisson sont égales à son paramètre ?
3. Quelles hypothèses permettent d'approcher une loi binomiale par une loi de Poisson ?
4. Quelle est la différence entre une densité et une fonction de masse ?
5. Pourquoi faut-il centrer et réduire une variable normale pour utiliser la loi normale centrée réduite ?
6. Que dit le théorème central limite ?
7. Pourquoi utilise-t-on une correction de continuité ?
8. Dans quelles situations l'approximation normale d'une loi de Poisson est-elle pertinente ?
9. Une variable aléatoire de loi de Poisson peut-elle prendre une valeur négative ?
10. Quelle différence y a-t-il entre une convergence en loi et une égalité de distributions ?

Références bibliographiques

Références

[1] Antoine Monfort, *Cours de probabilités*, Économica, Paris.

[2] Jean Jacod et Philip Protter, *Probability Essentials*, 2e édition, Springer, 2004.

[3] Sheldon M. Ross, *A First Course in Probability*, 10e édition, Pearson, 2019.

[4] William Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3e édition, Wiley, 1968.

[5] Gilles Pagès, *Éléments de calcul stochastique*, Éditions de l'École polytechnique, 2004.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Disponible sur : https://www.education.gouv.fr/.

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*, Éduscol. Disponible sur : https://eduscol.education.fr/.

[8] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports des jurys du CAPES externe de mathématiques*. Disponible sur le site officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.