Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Variable aléatoire réelle à densité

Table des matières

1 Introduction et problématique **3**

2 Prérequis et objectifs **3**

2.1 Prérequis . . . 3

2.2 Objectifs . . . 3

2.3 Enjeux didactiques . . . 4

3 Définition d'une variable aléatoire à densité **4**

3.1 Fonction de répartition . . . 4

3.2 Définition d'une densité . . . 4

4 Calcul des probabilités **5**

4.1 Probabilité d'un intervalle . . . 5

4.2 Interprétation graphique . . . 5

4.3 Lien avec la fonction de répartition . . . 5

5 Espérance d'une variable aléatoire à densité **6**

5.1 Définition . . . 6

5.2 Théorème de transfert . . . 6

5.3 Exemple de calcul . . . 6

6 Variance et écart-type **6**

6.1 Définition . . . 6

6.2 Transformation affine . . . 7

7 Lois usuelles à densité **7**

7.1 Loi uniforme . . . 7

7.2 Loi exponentielle . . . 8

7.3 Loi normale . . . 8

8 Inégalités de concentration **9**

8.1 Inégalité de Markov . . . 9

8.2 Inégalité de Bienaymé–Tchebychev 9

9 Exercice de synthèse **9**

10 Pistes pédagogiques pour l'oral du CAPES **10**

10.1 Prérequis 10

10.2 Objectifs d'apprentissage 11

10.3 Difficultés possibles 11

10.4 Exploitation numérique 11

11 Conclusion **11**

1 Introduction et problématique

Dans le cadre des probabilités, une variable aléatoire réelle permet d'associer un nombre réel à chaque issue d'une expérience aléatoire.

Lorsque les valeurs possibles de cette variable forment un ensemble continu, il est naturel d'étudier des variables aléatoires dont la loi de probabilité est décrite par une fonction appelée *densité*.

Ce modèle intervient notamment dans l'étude des durées d'attente, des erreurs de mesure, des phénomènes physiques et des variables issues de modèles statistiques.

La problématique de cette leçon est la suivante :

Comment décrire, calculer et interpréter la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle à densité ?

Nous présenterons les propriétés d'une densité, le calcul des probabilités, les notions d'espérance et de variance, puis plusieurs lois usuelles.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La compréhension de cette leçon nécessite les connaissances suivantes :

- **Probabilités :** expérience aléatoire, événement, probabilité, variable aléatoire réelle et fonction de répartition ;
- **Analyse :** continuité, dérivation, primitives, calcul intégral et calcul d'intégrales sur des intervalles non bornés ;
- **Fonctions :** étude de fonctions, représentation graphique et interprétation de l'aire sous une courbe ;
- **Calcul algébrique :** manipulation des expressions polynomiales et exponentielles ;
- **Statistique descriptive :** moyenne, variance et écart-type.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on doit être capable de :

- définir une variable aléatoire réelle à densité et caractériser une densité de probabilité ;
- vérifier qu'une fonction est une densité en étudiant sa positivité et son intégrale sur $\mathbb{R}$;
- calculer la probabilité d'un événement de la forme $\{a \leq X \leq b\}$ à l'aide d'une intégrale ;
- déterminer la fonction de répartition à partir de la densité et établir le lien entre ces deux fonctions ;
- calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire à densité, lorsque les intégrales correspondantes convergent ;
- reconnaître et exploiter les lois uniformes, exponentielles et normales ;
- interpréter graphiquement une probabilité et donner un sens aux paramètres caractérisant une loi ;
- mobiliser les outils numériques pour représenter des densités et des fonctions de répartition, tout en justifiant mathématiquement les résultats obtenus.

2.3 Enjeux didactiques

L'enjeu principal est de faire comprendre que, pour une variable aléatoire à densité, la probabilité d'obtenir une valeur isolée est nulle, tandis que la probabilité d'appartenir à un intervalle se calcule par intégration de la densité.

Il convient également de distinguer la densité f, la fonction de répartition F_X et la loi de probabilité de X, puis d'articuler les interprétations probabiliste, analytique et graphique.

3 Définition d'une variable aléatoire à densité

3.1 Fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Définition 1. *La fonction de répartition de X est la fonction $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par*

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x).$$

La fonction de répartition est croissante, continue à droite et vérifie

$$\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1.$$

Elle permet de retrouver les probabilités des intervalles :

$$\mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a).$$

3.2 Définition d'une densité

Définition 2. *Une variable aléatoire réelle X admet une densité de probabilité f si sa fonction de répartition s'écrit*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt,$$

où $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable, positive ou nulle presque partout, telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1.$$

Une densité peut être choisie positive ou nulle en tout point. Elle n'est toutefois déterminée qu'à égalité presque partout.

Propriété 1. *Une fonction f est une densité de probabilité si elle vérifie les conditions suivantes :*

1. *$f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;*
2. *f est intégrable sur $\mathbb{R}$;*
3. $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1.$$

Remarque 1. *La densité n'est pas une probabilité en un point. Les probabilités sont obtenues en intégrant la densité sur un intervalle.*

4 Calcul des probabilités

4.1 Probabilité d'un intervalle

Propriété 2. *Si X admet une densité f, alors, pour tous réels $a \leq b$,*

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

De plus, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(X = a) = 0.$$

Ainsi, les bornes ouvertes ou fermées d'un intervalle ne changent pas sa probabilité :

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

En particulier,

$$\mathbb{P}(X > a) = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = 1 - F_X(a).$$

4.2 Interprétation graphique

Lorsque f est continue, la probabilité $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ correspond à l'aire située entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

La condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

signifie que l'aire totale sous la courbe de densité vaut 1.

4.3 Lien avec la fonction de répartition

Si f est continue sur $\mathbb{R}$, alors le théorème fondamental de l'analyse donne

$$F_X'(x) = f(x).$$

Plus généralement, la fonction de répartition est absolument continue et sa dérivée est égale à f presque partout.

Exemple 1. *Considérons la densité*

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On vérifie que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 2x\,dx = 1.$$

La fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Par exemple,

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2} \leq X \leq 1\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

5 Espérance d'une variable aléatoire à densité

5.1 Définition

Définition 3. *Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Si l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| f(x)\, dx$$

est finie, alors X admet une espérance définie par

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\, dx.$$

L'espérance représente une valeur moyenne théorique du phénomène aléatoire. Elle ne correspond pas nécessairement à une valeur que la variable peut prendre avec une probabilité strictement positive.

5.2 Théorème de transfert

Théorème 1 (Théorème de transfert)**.** *Soit X une variable aléatoire de densité f et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Si*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)| f(x)\, dx < +\infty,$$

alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x)\, dx.$$

Ce résultat permet notamment de calculer les moments d'une variable aléatoire sans déterminer la loi de $g(X)$.

5.3 Exemple de calcul

Reprenons la densité

$$f(x) = 2x \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

On obtient

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 x(2x)\, dx = \int_0^1 2x^2\, dx = \frac{2}{3}.$$

De même,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2(2x)\, dx = \int_0^1 2x^3\, dx = \frac{1}{2}.$$

6 Variance et écart-type

6.1 Définition

Définition 4. *Si X admet un moment d'ordre deux fini, sa variance est*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right).$$

Son écart-type est

$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$

Propriété 3. *Si $\mathbb{E}(X^2)$ est finie, alors*

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Pour la variable précédente,

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Ainsi,

$$\sigma_X = \frac{1}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}.$$

6.2 Transformation affine

Pour tous réels a et b,

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b,$$

et

$$\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \,\mathrm{Var}(X).$$

Ces formules permettent d'étudier une variable transformée sans reprendre tous les calculs d'intégration.

7 Lois usuelles à densité

7.1 Loi uniforme

Définition 5. *Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a, b]$, avec $a < b$, si sa densité est*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{U}([a, b])$.

Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b, \\ 1 & \text{si } x > b. \end{cases}$$

Son espérance et sa variance sont

$$\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple 2. *Si $X \sim \mathcal{U}([0, 10])$, alors*

$$\mathbb{P}(2 \le X \le 5) = \frac{5-2}{10} = \frac{3}{10}.$$

7.2 Loi exponentielle

Définition 6. *Une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ si sa densité est*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

La normalisation découle de

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\, dx = 1.$$

Sa fonction de répartition est

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

On en déduit

$$\mathbb{P}(X > t) = e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0).$$

Les moments sont

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}, \qquad \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Cette loi intervient notamment dans la modélisation de durées d'attente et de durées de vie dans certains modèles.

Propriété 4 (Absence de mémoire)**.** *Pour tous $s, t \geq 0$,*

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t).$$

Cette propriété caractérise la loi exponentielle parmi les lois à densité, sous les hypothèses usuelles de continuité de la fonction de survie.

7.3 Loi normale

Définition 7. *Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si sa densité est*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right).$$

On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Cette densité est symétrique par rapport à la droite $x = \mu$. Les paramètres vérifient

$$\mathbb{E}(X) = \mu, \qquad \mathrm{Var}(X) = \sigma^2.$$

Pour la loi normale centrée réduite,

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

la densité est

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

La fonction de répartition, notée Φ, n'admet pas d'expression élémentaire usuelle :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt.$$

La standardisation donne, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

La loi normale intervient notamment en statistique, dans l'étude des erreurs de mesure et dans certaines approximations de lois de probabilité.

8 Inégalités de concentration

8.1 Inégalité de Markov

Théorème 2 (Inégalité de Markov)**.** *Soit Y une variable aléatoire positive d'espérance finie. Pour tout $a > 0$,*

$$\mathbb{P}(Y \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(Y)}{a}.$$

8.2 Inégalité de Bienaymé–Tchebychev

Théorème 3 (Inégalité de Bienaymé–Tchebychev)**.** *Si X admet une variance finie, alors, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}.$$

Cette inégalité fournit une majoration de la probabilité qu'une variable s'écarte fortement de son espérance.

Elle ne nécessite pas de connaître précisément la densité de X.

9 Exercice de synthèse

On considère une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = \begin{cases} c\,x(1-x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où c est une constante réelle.

Questions

1. Déterminer la constante c pour que f soit une densité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $\mathbb{P}(X \leq 1/2)$.
4. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
5. Calculer $\mathrm{Var}(X)$.

Correction

1. Normalisation

On impose

$$\int_0^1 cx(1-x)\,dx = 1.$$

Ainsi,

$$c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 1,$$

d'où

$$\boxed{c = 6}.$$

2. Fonction de répartition

Pour $0 \leq x \leq 1$,

$$F_X(x) = \int_0^x 6t(1-t)\,dt = 3x^2 - 2x^3.$$

Par conséquent,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 3x^2 - 2x^3 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. Probabilité

$$\mathbb{P}(X \leq 1/2) = F_X(1/2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4. Espérance

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^1 6x^2(1-x)\,dx = 6\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

5. Variance

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 6x^3(1-x)\,dx = 6\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3}{10}.$$

Donc

$$\mathrm{Var}(X) = \frac{3}{10} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{1}{20}}.$$

10 Pistes pédagogiques pour l'oral du CAPES

10.1 Prérequis

Les élèves doivent maîtriser :

- les notions de probabilité et de variable aléatoire ;
- les fonctions et leur représentation graphique ;
- les primitives et le calcul intégral ;
- les propriétés élémentaires de l'espérance et de la variance.

10.2 Objectifs d'apprentissage

À l'issue de la séquence, l'élève doit être capable de :

- vérifier qu'une fonction est une densité ;
- calculer une probabilité à l'aide d'une intégrale ;
- déterminer une fonction de répartition ;
- calculer une espérance et une variance ;
- reconnaître et utiliser les lois uniformes, exponentielles et normales.

10.3 Difficultés possibles

Les principales difficultés sont :

- confondre densité et probabilité ;
- oublier la condition de normalisation ;
- confondre $F_X(x)$ et $f(x)$;
- oublier que $\mathbb{P}(X = a) = 0$ pour une variable à densité ;
- confondre variance et écart-type ;
- interpréter incorrectement les bornes d'une intégrale.

10.4 Exploitation numérique

Un logiciel de calcul formel ou un tableur peut permettre :

- de représenter la densité et la fonction de répartition ;
- de visualiser l'aire correspondant à une probabilité ;
- de comparer plusieurs densités ;
- d'illustrer la variation des paramètres d'une loi normale.

Ces outils doivent soutenir le raisonnement mathématique et non remplacer la justification des résultats.

11 Conclusion

Une variable aléatoire réelle à densité permet de modéliser des phénomènes aléatoires continus à l'aide d'une fonction intégrable.

La densité détermine les probabilités par intégration, tandis que la fonction de répartition décrit les probabilités cumulées. L'espérance et la variance fournissent des indicateurs synthétiques de position et de dispersion.

Les lois uniforme, exponentielle et normale illustrent la diversité des modèles possibles et leurs applications.

La maîtrise de ces notions repose sur l'articulation entre interprétation probabiliste, calcul intégral et représentation graphique.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Disponible sur : https://www.education.gouv.fr/.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré (CAPES) de mathématiques*, sujets, rapports de jury et programmes des épreuves. Disponible sur : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.

[3] A. Monfort, *Cours de probabilités*, Économica, Paris.

[4] D. Foata et A. Fuchs, *Calcul des probabilités*, Dunod, Paris.

[5] W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, vol. 1, 3e édition, Wiley, 1968.

[6] G. Grimmett et D. Stirzaker, *Probability and Random Processes*, 3e édition, Oxford University Press, 2001.

[7] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1976.

[8] J. Stewart, *Calculus : Early Transcendentals*, Cengage Learning.

[9] GeoGebra, *Calculatrice graphique et outils de visualisation mathématique*. Disponible sur : https://www.geogebra.org/.

Remarque bibliographique

Les références relatives aux probabilités permettent d'approfondir les propriétés des densités, les lois usuelles, les moments et les inégalités de concentration. Les ouvrages d'analyse apportent les fondements du calcul intégral utilisés dans les démonstrations.

Pour préparer l'oral du CAPES, il convient de consulter en priorité les programmes officiels en vigueur et les rapports de jury récents, afin d'adapter le niveau de rigueur et les exemples aux attentes du concours.