Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Multiples, diviseurs, division euclidienne

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
- 2.1 Prérequis . . . 2
- 2.2 Objectifs mathématiques . . . 2
- 2.3 Objectifs didactiques . . . 2

3 Multiples et diviseurs **3**
- 3.1 Définitions . . . 3
- 3.2 Propriétés fondamentales . . . 3
- 3.3 Diviseurs et multiples : exemples . . . 4
- 3.4 Critères usuels de divisibilité . . . 4

4 La division euclidienne **4**
- 4.1 Énoncé du théorème . . . 4
- 4.2 Démonstration de l'existence . . . 4
- 4.3 Démonstration de l'unicité . . . 5
- 4.4 Exemples . . . 5
- 4.5 Lien entre divisibilité et division euclidienne . . . 6

5 Applications de la division euclidienne **6**
- 5.1 Problèmes de partage . . . 6
- 5.2 Problèmes de regroupement . . . 6
- 5.3 Recherche d'un multiple ou d'un diviseur . . . 6

6 L'algorithme d'Euclide **7**
- 6.1 Principe . . . 7
- 6.2 Exemple de calcul . . . 7
- 6.3 Terminaison de l'algorithme . . . 7

7 Approche didactique et erreurs fréquentes **8**
- 7.1 Progression pédagogique possible . . . 8
- 7.2 Erreurs fréquentes . . . 8
- 7.3 Évaluation possible . . . 8

8 Ouvertures **8**
- 8.1 Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers . . . 8
- 8.2 Congruences . . . 9
- 8.3 Applications informatiques . . . 9

9 Conclusion **9**

Références bibliographiques **9**

1 Introduction

L'arithmétique des entiers naturels constitue un domaine fondamental des mathématiques. Les notions de multiple, de diviseur et de division euclidienne permettent de décrire les relations entre les nombres entiers et de résoudre de nombreux problèmes concrets.

La division euclidienne intervient notamment dans les problèmes de partage, de regroupement et de périodicité. Elle constitue également le point de départ de l'algorithme d'Euclide, qui permet de calculer le plus grand commun diviseur de deux entiers.

Ces notions jouent un rôle important dans l'enseignement des mathématiques au collège. Elles permettent de développer le raisonnement déductif, la maîtrise du calcul et la capacité à traduire une situation en langage mathématique.

La leçon s'organise autour de trois questions :

— Comment caractériser les multiples et les diviseurs d'un entier ?

— Comment formaliser la division avec reste ?

— Comment utiliser ces notions pour résoudre des problèmes et établir des résultats d'arithmétique ?

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les élèves doivent maîtriser :

— les opérations élémentaires sur les entiers naturels ;

— les tables de multiplication ;

— les notions de quotient et de reste dans une division ;

— les propriétés élémentaires de l'égalité ;

— la résolution de problèmes simples de partage et de regroupement.

Pour une étude plus approfondie, on pourra mobiliser les notions de nombres premiers, de décomposition en facteurs premiers et de plus grand commun diviseur.

2.2 Objectifs mathématiques

À l'issue de cette leçon, on souhaite pouvoir :

— définir rigoureusement les multiples et les diviseurs d'un entier ;

— établir les propriétés fondamentales de la divisibilité ;

— énoncer et démontrer le théorème de la division euclidienne ;

— utiliser la division euclidienne pour résoudre des problèmes ;

— expliquer le principe de l'algorithme d'Euclide ;

— articuler exemples numériques, raisonnement algébrique et situations d'enseignement.

2.3 Objectifs didactiques

Il s'agit également de :

— distinguer une vérification sur des exemples d'une démonstration générale ;

— faire comprendre le rôle du reste dans une division euclidienne ;

— passer d'une situation concrète à une écriture mathématique ;

— repérer les erreurs fréquentes concernant les critères de divisibilité et le quotient.

3 Multiples et diviseurs

3.1 Définitions

Définition 1. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$.*

On dit que b est un multiple de a s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$b = ak.$$

Lorsque $a \neq 0$, on dit également que a est un diviseur de b, ou que a divise b. On note alors

$$a \mid b.$$

Par exemple,

$$24 = 6 \times 4.$$

Ainsi, 24 est un multiple de 6, et 6 est un diviseur de 24.

La relation de divisibilité s'écrit aussi

$$a \mid b \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N},\ b = ak,$$

pour $a \neq 0$.

Dans $\mathbb{N}$, tout entier non nul divise 0, puisque

$$0 = a \times 0.$$

En revanche, 0 ne divise aucun entier non nul.

On adopte la convention usuelle selon laquelle 0 est multiple de tout entier naturel.

3.2 Propriétés fondamentales

Propriété 1. *Pour tous entiers naturels a, b, c :*

1. *Si $a \neq 0$, alors $a \mid a$.*
2. *Si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.*
3. *Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors*
$$a \mid (b + c).$$
4. *Si $a \mid b$, alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,*
$$a \mid kb.$$
5. *Si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors, pour tous $u, v \in \mathbb{N}$,*
$$a \mid (ub + vc).$$

Démonstration. Les propriétés se démontrent à partir de la définition.

Par exemple, supposons que $a \mid b$ et $b \mid c$. Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que

$$b = au \qquad \text{et} \qquad c = bv.$$

Alors

$$c = auv = a(uv),$$

d'où $a \mid c$.

De même, si $a \mid b$ et $a \mid c$, il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tels que

$$b = au, \qquad c = av.$$

On obtient

$$b + c = a(u + v),$$

donc $a \mid (b + c)$. La dernière propriété se démontre de la même manière. □

3.3 Diviseurs et multiples : exemples

Exemple 1. *Les diviseurs positifs de* 18 *sont*

$$1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9,\ 18.$$

En effet, les couples de facteurs positifs de 18 *sont*

$$1 \times 18, \quad 2 \times 9, \quad 3 \times 6.$$

Exemple 2. *Les multiples de* 7 *sont*

$$0,\ 7,\ 14,\ 21,\ 28,\ 35, \ldots$$

Ils forment un ensemble infini.

3.4 Critères usuels de divisibilité

Pour les entiers naturels, on utilise notamment les critères suivants :

— un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair ;

— il est divisible par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ;

— il est divisible par 10 si son chiffre des unités est 0 ;

— il est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 ;

— il est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Ces critères peuvent être justifiés en écrivant un entier en base dix.
Par exemple, si

$$n = \overline{a_k \cdots a_1 a_0},$$

alors

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i 10^i.$$

Or $10 \equiv 1 \pmod 9$ et $10 \equiv 1 \pmod 3$. Par conséquent, n et la somme de ses chiffres ont le même reste dans la division par 3 et par 9.

4 La division euclidienne

4.1 Énoncé du théorème

Théorème 1 (Division euclidienne)**.** *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que*

$$\boxed{a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.}$$

L'entier q est le quotient et l'entier r est le reste de la division euclidienne de a par b.

4.2 Démonstration de l'existence

Considérons l'ensemble

$$E = \{a - bk \mid k \in \mathbb{N},\ bk \leq a\}.$$

Cet ensemble est non vide, car $0 \in E$. Il est fini puisque $bk \leq a$ implique $k \leq a/b$.
Il possède donc un plus grand élément, noté r. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$r = a - bq.$$

Ainsi,

$$a = bq + r \qquad \text{avec} \qquad r \geq 0.$$

Montrons que $r < b$. Supposons, au contraire, que $r \geq b$. Alors

$$a - b(q+1) = r - b \geq 0.$$

L'entier $a - b(q+1)$ appartient donc à E et est strictement supérieur à r, ce qui contredit la maximalité de r.

Par conséquent,

$$0 \leq r < b.$$

L'existence du couple (q, r) est démontrée.

4.3 Démonstration de l'unicité

Supposons que

$$a = bq + r = bq' + r',$$

avec

$$0 \leq r < b, \qquad 0 \leq r' < b.$$

Alors

$$b(q - q') = r' - r.$$

Comme r et r' appartiennent à $\{0, 1, \ldots, b-1\}$, on a

$$-(b-1) \leq r' - r \leq b - 1.$$

Le membre de droite est un multiple de b. Le seul multiple de b compris strictement entre $-b$ et b est 0. Ainsi,

$$r' = r.$$

On en déduit $b(q - q') = 0$. Comme $b \neq 0$,

$$q = q'.$$

Le couple (q, r) est donc unique.

4.4 Exemples

Exemple 3. *Effectuons la division euclidienne de* 157 *par* 12.

On a

$$157 = 12 \times 13 + 1.$$

Comme $0 \leq 1 < 12$, *le quotient est* 13 *et le reste est* 1.

Exemple 4. *La division euclidienne de* 84 *par* 7 *s'écrit*

$$84 = 7 \times 12 + 0.$$

Le reste est nul. On en déduit que

$$7 \mid 84.$$

4.5 Lien entre divisibilité et division euclidienne

Propriété 2. *Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. L'entier a est divisible par b si et seulement si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.*

Démonstration. Si $b \mid a$, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$a = bq.$$

C'est une division euclidienne de reste nul. Par unicité, le reste est nul.

Réciproquement, si le reste est nul, on a

$$a = bq + 0 = bq.$$

Donc $b \mid a$. □

Cette propriété établit le lien essentiel entre la divisibilité et la division euclidienne.

5 Applications de la division euclidienne

5.1 Problèmes de partage

Exemple 5. *On dispose de* 137 *objets que l'on souhaite répartir équitablement entre* 8 *personnes, en donnant le même nombre entier d'objets à chacun.*

La division euclidienne donne

$$137 = 8 \times 17 + 1.$$

Chaque personne reçoit 17 *objets et il reste un objet.*

La situation concrète permet de donner un sens au quotient et au reste. Elle constitue un point d'appui important dans l'enseignement au collège.

5.2 Problèmes de regroupement

Exemple 6. *Une école possède* 245 *élèves et souhaite former des groupes de* 12 *élèves.*

On calcule

$$245 = 12 \times 20 + 5.$$

On peut former 20 *groupes complets, avec* 5 *élèves restants. Si tous les élèves doivent être répartis dans des groupes d'au plus* 12 *élèves, il faut prévoir* 21 *groupes.*

Cet exemple permet de souligner que l'interprétation du quotient et du reste dépend de la question posée.

5.3 Recherche d'un multiple ou d'un diviseur

Exemple 7. *Déterminons si* 391 *est divisible par* 17.

On effectue la division :

$$391 = 17 \times 23 + 0.$$

Le reste étant nul, 391 *est divisible par* 17.

6 L'algorithme d'Euclide

6.1 Principe

L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels non tous deux nuls.

Définition 2. *Le plus grand commun diviseur de deux entiers a et b, non tous deux nuls, est le plus grand entier naturel qui divise simultanément a et b. On le note*

$$\mathrm{PGCD}(a, b).$$

Propriété 3. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b > 0$. Si la division euclidienne de a par b s'écrit*

$$a = bq + r,$$

alors

$$\boxed{\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r).}$$

Démonstration. Soit d un diviseur commun de a et de b. Puisque

$$r = a - bq,$$

le nombre d divise également r.

Réciproquement, si d divise b et r, alors

$$a = bq + r$$

montre que d divise a.

Les couples (a, b) et (b, r) possèdent donc exactement les mêmes diviseurs communs. Ils ont par conséquent le même plus grand commun diviseur. □

6.2 Exemple de calcul

Calculons $\mathrm{PGCD}(252, 105)$.

Les divisions euclidiennes successives donnent

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \times 105 + 42, \\ 105 &= 2 \times 42 + 21, \\ 42 &= 2 \times 21 + 0. \end{aligned}$$

Les restes successifs sont 42, 21, puis 0. Le dernier reste non nul est 21. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{PGCD}(252, 105) = 21.}$$

6.3 Terminaison de l'algorithme

À chaque étape, le nouveau reste est un entier naturel strictement inférieur au diviseur précédent. Tant que le reste est non nul, les restes strictement positifs diminuent.

Une suite strictement décroissante d'entiers naturels positifs étant nécessairement finie, l'algorithme d'Euclide s'arrête.

Cette propriété justifie la terminaison de l'algorithme.

7 Approche didactique et erreurs fréquentes

7.1 Progression pédagogique possible

Une progression au collège peut s'organiser en plusieurs étapes :

1. Manipuler des objets pour introduire les notions de partage et de regroupement.
2. Décrire les multiples et les diviseurs à l'aide d'égalités.
3. Introduire la division euclidienne et la condition $0 \leq r < b$.
4. Faire vérifier les résultats en utilisant l'égalité $a = bq + r$.
5. Utiliser la division euclidienne dans des problèmes de divisibilité.
6. Introduire, lorsque les connaissances des élèves le permettent, l'algorithme d'Euclide.

7.2 Erreurs fréquentes

— **Confondre quotient et reste.** On doit toujours vérifier l'égalité $a = bq+r$ et la condition $0 \leq r < b$.

— **Accepter un reste trop grand.** Par exemple, $35 = 6 \times 4 + 11$ est une égalité vraie, mais ce n'est pas une division euclidienne de 35 par 6, car $11 \geq 6$.

— **Confondre multiple et diviseur.** Si $a \mid b$, alors a est un diviseur de b et b est un multiple de a.

— **Croire qu'un exemple suffit à démontrer une propriété générale.** Une démonstration doit établir la propriété pour tous les entiers concernés.

— **Oublier le contexte du problème.** Le quotient entier ne suffit pas toujours à répondre à la question : il faut interpréter le reste.

7.3 Évaluation possible

On pourra proposer les questions suivantes :

1. Déterminer les diviseurs positifs de 36.
2. Effectuer la division euclidienne de 203 par 9.
3. Justifier que 9 divise 203 ou ne le divise pas.
4. Calculer $\mathrm{PGCD}(84, 126)$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide.
5. Résoudre un problème de partage en interprétant correctement le quotient et le reste.

8 Ouvertures

Les notions étudiées permettent d'aborder plusieurs thèmes complémentaires.

8.1 Nombres premiers et décomposition en facteurs premiers

Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 qui possède exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

La recherche des diviseurs conduit naturellement à la décomposition en facteurs premiers. Par exemple,

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

Cette décomposition permet de déterminer les diviseurs d'un entier et de calculer des PGCD et des PPCM.

8.2 Congruences

La division euclidienne permet de définir les congruences. Pour des entiers a, b et un entier $n \geq 1$, on écrit

$$a \equiv b \pmod{n}$$

si et seulement si n divise $a - b$.

Cette notation exprime que a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Les congruences interviennent notamment dans les critères de divisibilité, les problèmes de périodicité et l'arithmétique modulaire.

8.3 Applications informatiques

La division euclidienne est utilisée dans les algorithmes de calcul, notamment pour déterminer le PGCD de deux entiers. Elle permet également de traiter des problèmes de périodicité et de calcul du reste dans des programmes informatiques.

9 Conclusion

Les notions de multiple, de diviseur et de division euclidienne sont étroitement liées.

La divisibilité se traduit par l'existence d'un quotient entier, tandis que la division euclidienne fournit une écriture unique

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b.$$

Cette écriture permet de décider si un entier en divise un autre et constitue le fondement de l'algorithme d'Euclide.

Sur le plan didactique, ces notions offrent de nombreuses possibilités pour articuler manipulations, résolution de problèmes, calcul et démonstration. Elles préparent également à l'étude des nombres premiers, des congruences et de propriétés arithmétiques plus avancées.

Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*. Ouvrage fondateur de la géométrie et de l'arithmétique grecques, notamment pour les propriétés de divisibilité et les raisonnements sur les entiers.

[2] J.-P. Serre, *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, 1970. Référence pour l'approfondissement de l'arithmétique, des congruences et des propriétés des entiers.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme d'enseignement du cycle des approfondissements (cycle 4)*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale, n° 31, 30 juillet 2020. Référence institutionnelle pour les apprentissages mathématiques du collège, à consulter avec les éventuelles actualisations du programme en vigueur.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Éduscol – Ressources d'accompagnement du programme de mathématiques au cycle 4*. Ressources institutionnelles pour la mise en œuvre des notions d'arithmétique et la construction des apprentissages. Disponible sur : `https://eduscol.education.fr/`