Leçon de CAPES de mathématiques
PGCD et PPCM de deux entiers naturels

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
2.1 Prérequis 2
2.2 Objectifs 2

3 Divisibilité et diviseurs communs **2**

4 Le plus grand commun diviseur **3**
4.1 Définition 3
4.2 Premières propriétés 3
4.3 Décomposition en facteurs premiers 3
4.4 L'algorithme d'Euclide 4
4.5 Identité de Bézout 4

5 Entiers premiers entre eux **4**

6 Le plus petit commun multiple **5**
6.1 Définition 5
6.2 Décomposition en facteurs premiers 5
6.3 Relation entre le PGCD et le PPCM 5

7 Applications **6**
7.1 Simplification d'une fraction 6
7.2 Problème de partage 6
7.3 Problème de périodicité 6

8 Liste d'exercices **6**

9 Conclusion **8**

10 Références bibliographiques et institutionnelles **9**

1 Introduction

Le plus grand commun diviseur (PGCD) et le plus petit commun multiple (PPCM) de deux entiers naturels sont des notions fondamentales de l'arithmétique. Elles interviennent dans la simplification des fractions, la résolution de problèmes de divisibilité, la recherche de périodes communes et l'étude des relations entre entiers.

Plusieurs méthodes permettent de déterminer le PGCD et le PPCM : l'énumération des diviseurs ou des multiples, la décomposition en facteurs premiers et l'algorithme d'Euclide. Ce dernier constitue une méthode particulièrement efficace, même pour des entiers relativement grands.

L'objectif de cette leçon est de présenter ces notions, leurs propriétés essentielles, leurs liens et leurs applications.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les connaissances suivantes sont nécessaires :

— connaître les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$;
— maîtriser les opérations élémentaires sur les entiers ;
— connaître la relation de divisibilité dans $\mathbb{N}$;
— savoir effectuer une division euclidienne ;
— connaître les notions de nombre premier et de décomposition en facteurs premiers ;
— savoir simplifier une fraction.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, un élève doit être capable de :

— définir le PGCD et le PPCM de deux entiers naturels ;
— calculer un PGCD à l'aide de plusieurs méthodes ;
— déterminer un PPCM et établir le lien entre PGCD et PPCM ;
— utiliser l'algorithme d'Euclide ;
— reconnaître des entiers premiers entre eux ;
— résoudre des problèmes de partage, de périodicité et de simplification de fractions.

3 Divisibilité et diviseurs communs

Définition 1. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$. On dit que a divise b s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b = ak$. On note alors $a \mid b$.*

Propriété 1. *Pour tous entiers naturels a, b, c :*

— *si $a \mid b$ et $a \mid c$, alors $a \mid (b + c)$;*
— *si $a \mid b$, alors $a \mid bc$;*
— *si $a \mid b$ et $b \mid c$, alors $a \mid c$.*

Définition 2. *Un diviseur commun de deux entiers naturels a et b est un entier qui divise simultanément a et b.*

Les conventions relatives à zéro doivent être précisées : tout entier naturel non nul divise 0, tandis que 0 ne divise aucun entier non nul. Le PGCD de a et b, lorsqu'ils ne sont pas tous deux nuls, est bien défini. Dans cette leçon, on adopte la convention $\mathrm{PGCD}(0, 0) = 0$.

4 Le plus grand commun diviseur

4.1 Définition

Définition 3. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$, non tous deux nuls. Le plus grand commun diviseur de a et b, noté* $\mathrm{PGCD}(a, b)$*, est le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b.*

Exemple 1. *Les diviseurs positifs de* 18 *sont*

$$1, 2, 3, 6, 9, 18,$$

et ceux de 30 *sont*

$$1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30.$$

Les diviseurs communs sont $1, 2, 3, 6$*. Ainsi,*

$$\mathrm{PGCD}(18, 30) = 6.$$

4.2 Premières propriétés

Propriété 2. *Pour $a, b \in \mathbb{N}$:*

— $\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, a)$;

— *si $a \neq 0$, alors* $\mathrm{PGCD}(a, 0) = a$;

— $\mathrm{PGCD}(a, a) = a$;

— $\mathrm{PGCD}(a, b) \leq \min(a, b)$ *lorsque* $a, b > 0$;

— *si $a \mid b$, alors* $\mathrm{PGCD}(a, b) = a$.

4.3 Décomposition en facteurs premiers

Le théorème fondamental de l'arithmétique affirme que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 admet une décomposition en facteurs premiers unique à l'ordre des facteurs près.

Soient

$$a = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}, \qquad b = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\beta_i},$$

où les p_i sont les nombres premiers intervenant dans au moins une des deux décompositions. Les exposants absents sont pris égaux à zéro.

Propriété 3. *Le PGCD s'obtient en prenant, pour chaque facteur premier, le plus petit des deux exposants :*

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Exemple 2. *Considérons*

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5, \qquad 840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7.$$

On obtient

$$\mathrm{PGCD}(360, 840) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120.$$

4.4 L'algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide repose sur la division euclidienne et sur la propriété suivante.

Théorème 1 (Algorithme d'Euclide). *Soient $a, b \in \mathbb{N}$ avec $a \geq b > 0$. Si*

$$a = bq + r, \qquad 0 \leq r < b,$$

alors

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = \mathrm{PGCD}(b, r).$$

Démonstration. Un entier divise simultanément a et b si et seulement s'il divise simultanément b et $a - bq = r$. Les couples (a, b) et (b, r) ont donc exactement les mêmes diviseurs communs. Ils ont par conséquent le même PGCD. □

En répétant cette opération, les restes décroissent strictement jusqu'à l'obtention d'un reste nul. Le dernier reste non nul est le PGCD recherché.

Exemple 3. *Calculons le PGCD de* 252 *et* 105 *:*

$$\begin{aligned} 252 &= 2 \times 105 + 42, \\ 105 &= 2 \times 42 + 21, \\ 42 &= 2 \times 21 + 0. \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 21*. Ainsi,*

$$\boxed{\mathrm{PGCD}(252, 105) = 21}.$$

4.5 Identité de Bézout

Théorème 2 (Identité de Bézout). *Pour tous entiers naturels a, b non tous deux nuls, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$au + bv = \mathrm{PGCD}(a, b).$$

Cette identité peut être obtenue en remontant les égalités de l'algorithme d'Euclide. Elle joue un rôle important en arithmétique, notamment pour les équations diophantiennes.

Dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned} 21 &= 105 - 2 \times 42 \\ &= 105 - 2(252 - 2 \times 105) \\ &= -2 \times 252 + 5 \times 105. \end{aligned}$$

On a donc

$$-2 \times 252 + 5 \times 105 = 21.$$

5 Entiers premiers entre eux

Définition 4. *Deux entiers naturels a et b, non tous deux nuls, sont dits premiers entre eux lorsque*

$$\mathrm{PGCD}(a, b) = 1.$$

Propriété 4. *Les entiers a et b sont premiers entre eux si et seulement s'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$au + bv = 1.$$

Exemple 4. *Comme* $\mathrm{PGCD}(14, 25) = 1$*, les entiers* 14 *et* 25 *sont premiers entre eux.*

Propriété 5. *Si a et b sont premiers entre eux et si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.*

Cette propriété est souvent appelée lemme de Gauss.

6 Le plus petit commun multiple

6.1 Définition

Définition 5. *Soient $a, b \in \mathbb{N}$, non tous deux nuls. Le plus petit commun multiple de a et b, noté* $\mathrm{PPCM}(a,b)$*, est le plus petit entier naturel strictement positif qui est multiple de a et de b.*

Lorsque l'un des deux entiers est nul et l'autre non nul, leur seul multiple commun est 0. On adopte alors la convention

$$\mathrm{PPCM}(a,0) = 0 \quad \text{pour } a \in \mathbb{N}.$$

La définition par le plus petit multiple strictement positif s'applique donc directement lorsque $a, b > 0$.

Exemple 5. *Les premiers multiples positifs de* 12 *sont*

$$12, 24, 36, 48, 60, 72, \ldots$$

et ceux de 18 *sont*

$$18, 36, 54, 72, \ldots$$

Le premier multiple commun positif est 36*, donc*

$$\mathrm{PPCM}(12,18) = 36.$$

6.2 Décomposition en facteurs premiers

Avec les notations précédentes, on a

$$\mathrm{PPCM}(a,b) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}.$$

Le PPCM se calcule donc en prenant, pour chaque facteur premier, le plus grand des deux exposants.

Exemple 6. *Pour* $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ *et* $840 = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7$*, on obtient*

$$\mathrm{PPCM}(360,840) = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 2520.$$

6.3 Relation entre le PGCD et le PPCM

Théorème 3. *Pour tous entiers naturels strictement positifs a et b,*

$$\boxed{\mathrm{PGCD}(a,b)\ \mathrm{PPCM}(a,b) = ab}.$$

Démonstration. Écrivons

$$a = \prod_i p_i^{\alpha_i}, \qquad b = \prod_i p_i^{\beta_i}.$$

Le produit du PGCD et du PPCM vaut

$$\prod_i p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)} \prod_i p_i^{\max(\alpha_i,\beta_i)}.$$

Pour chaque indice i,

$$\min(\alpha_i,\beta_i) + \max(\alpha_i,\beta_i) = \alpha_i + \beta_i.$$

Le produit précédent est donc égal à

$$\prod_i p_i^{\alpha_i+\beta_i} = ab.$$

□

Exemple 7. *Puisque*

$$\mathrm{PGCD}(360, 840) = 120,$$

on en déduit

$$\mathrm{PPCM}(360, 840) = \frac{360 \times 840}{120} = 2520.$$

Corollaire 1. *Si a et b sont premiers entre eux, alors*

$$\mathrm{PPCM}(a, b) = ab.$$

7 Applications

7.1 Simplification d'une fraction

Pour simplifier une fraction $\frac{a}{b}$ avec $b \neq 0$, on divise son numérateur et son dénominateur par leur PGCD. La fraction obtenue est irréductible.

Par exemple,

$$\frac{252}{105} = \frac{252 \div 21}{105 \div 21} = \frac{12}{5}.$$

7.2 Problème de partage

On dispose de 84 pommes et de 126 poires. On souhaite constituer le plus grand nombre possible de paniers identiques, sans reste, chaque panier contenant le même nombre de pommes et le même nombre de poires.

Le nombre maximal de paniers est

$$\mathrm{PGCD}(84, 126) = 42.$$

Chaque panier contient alors

$$\frac{84}{42} = 2 \text{ pommes}, \qquad \frac{126}{42} = 3 \text{ poires}.$$

7.3 Problème de périodicité

Deux événements se reproduisent respectivement toutes les 12 minutes et toutes les 18 minutes. S'ils se produisent simultanément à un instant donné, le prochain instant où ils seront simultanés intervient après

$$\mathrm{PPCM}(12, 18) = 36 \text{ minutes}.$$

8 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de vérifier la maîtrise des définitions, des algorithmes et des applications.

Exercice 1 – Calcul par énumération

Déterminer les diviseurs communs, le PGCD et le PPCM de 24 et 36.

Indication : dresser la liste des diviseurs de chaque entier, puis celle de leurs multiples positifs.

Résultats :

$$\mathrm{PGCD}(24, 36) = 12, \qquad \mathrm{PPCM}(24, 36) = 72.$$

Exercice 2 – Décomposition en facteurs premiers

Calculer le PGCD et le PPCM de 540 et 756 en utilisant la décomposition en facteurs premiers.

Indication :

$$540 = 2^2 \times 3^3 \times 5, \qquad 756 = 2^2 \times 3^3 \times 7.$$

Résultats :

$$\mathrm{PGCD}(540, 756) = 108, \qquad \mathrm{PPCM}(540, 756) = 3780.$$

Exercice 3 – Algorithme d'Euclide

Calculer PGCD(2024, 748) à l'aide de l'algorithme d'Euclide.

Indication : effectuer successivement les divisions euclidiennes jusqu'à l'obtention d'un reste nul.

Résultat :

$$\mathrm{PGCD}(2024, 748) = 44.$$

Exercice 4 – Identité de Bézout

Déterminer des entiers relatifs u et v tels que

$$252u + 105v = \mathrm{PGCD}(252, 105).$$

Indication : remonter les égalités de l'algorithme d'Euclide.

Une solution :

$$u = -2, \qquad v = 5.$$

Exercice 5 – Entiers premiers entre eux

Montrer que les entiers 35 et 64 sont premiers entre eux, puis déterminer leur PPCM.

Résultat :

$$\mathrm{PGCD}(35, 64) = 1, \qquad \mathrm{PPCM}(35, 64) = 2240.$$

Exercice 6 – Simplification de fraction

Rendre irréductible la fraction

$$\frac{924}{1386}.$$

Indication : calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur.

Résultat :

$$\frac{924}{1386} = \frac{2}{3}.$$

Exercice 7 – Problème de partage

Une association possède 144 cahiers et 216 stylos. Elle souhaite préparer le plus grand nombre possible de lots identiques, sans reste.

1. Combien de lots peut-elle préparer ?
2. Combien de cahiers et de stylos chaque lot contient-il ?

Résultats :

$$\mathrm{PGCD}(144, 216) = 72.$$

L'association peut préparer 72 lots comprenant chacun 2 cahiers et 3 stylos.

Exercice 8 – Problème de périodicité

Deux feux clignotent respectivement toutes les 45 secondes et toutes les 60 secondes. Ils clignotent ensemble à l'instant initial.

Au bout de combien de temps clignoteront-ils de nouveau simultanément ?

Résultat :

$$\mathrm{PPCM}(45, 60) = 180.$$

Ils clignoteront simultanément après 180 secondes, soit 3 minutes.

Exercice 9 – Démonstration

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $d = \mathrm{PGCD}(a, b)$. Démontrer que

$$\mathrm{PGCD}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1.$$

Indication : si un entier c divise simultanément a/d et b/d, alors cd divise simultanément a et b. Utiliser la définition de d.

Exercice 10 – Problème de découpage

On veut découper deux rubans de longueurs 168 cm et 252 cm en morceaux de même longueur, aussi longs que possible, sans perte.

1. Quelle doit être la longueur de chaque morceau ?
2. Combien de morceaux obtient-on au total ?

Résultats :

$$\mathrm{PGCD}(168, 252) = 84.$$

Chaque morceau mesure 84 cm. On obtient 2 morceaux du premier ruban et 3 morceaux du second, soit 5 morceaux au total.

9 Conclusion

Le PGCD et le PPCM permettent de traiter deux problèmes complémentaires : rechercher les diviseurs communs les plus grands et les multiples communs les plus petits.

Trois méthodes essentielles sont à retenir :

— l'énumération des diviseurs ou des multiples, adaptée aux petits entiers ;

— la décomposition en facteurs premiers, qui met en évidence les exposants minimaux et maximaux ;

— l'algorithme d'Euclide, particulièrement efficace pour calculer un PGCD.

La relation

$$\mathrm{PGCD}(a, b)\,\mathrm{PPCM}(a, b) = ab$$

permet de passer d'une notion à l'autre. Enfin, l'identité de Bézout et le lemme de Gauss montrent que ces notions dépassent le simple calcul : elles constituent des outils fondamentaux pour l'étude des entiers et des équations diophantiennes.

10 Références bibliographiques et institutionnelles

1. Euclide, *Les Éléments*, livre VII. Texte fondateur de l'arithmétique classique, notamment pour les notions de divisibilité et de plus grand commun diviseur.
2. Édouard Lucas, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, 1891. Ouvrage classique consacré à l'arithmétique des entiers.
3. Commission française pour l'enseignement des mathématiques, ressources et documents relatifs à l'enseignement de l'arithmétique. `https://www.cfem.asso.fr/`
4. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège*. Les notions de divisibilité, de nombres premiers, de décomposition en facteurs premiers et de fractions irréductibles sont à mettre en relation avec les programmes officiels en vigueur. `https://www.education.gouv.fr/`
5. Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports des jurys du CAPES de mathématiques*. Ces documents permettent de préparer la présentation orale, la justification des propriétés et le choix des exercices. `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/`