Leçon d'oral du CAPES de mathématiques
Équations du second degré à coefficients réels ou complexes

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**

2 Introduction et définition **2**

3 Résolution dans le cas réel **2**
3.1 Mise sous forme canonique 2
3.2 Théorème de résolution 3
3.3 Exemples 4

4 Résolution dans le cas complexe **4**
4.1 Existence d'une racine carrée complexe 4
4.2 Théorème fondamental de résolution 4
4.3 Cas des coefficients réels 5

5 Factorisation et relations entre les racines **5**
5.1 Factorisation d'un trinôme 5
5.2 Relations de Viète 6

6 Signe d'un trinôme réel **6**
6.1 Cas où le discriminant est positif 6
6.2 Cas où le discriminant est nul 6
6.3 Cas où le discriminant est négatif 6

7 Interprétation graphique **7**

8 Applications **7**
8.1 Résolution d'un problème géométrique 7
8.2 Détermination d'un paramètre 7

9 Exercices **8**

10 Conclusion **9**

11 Références bibliographiques **9**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis

Cette leçon s'appuie sur les connaissances suivantes :

— calcul algébrique : développement, factorisation et identités remarquables ;

— résolution d'équations du premier degré ;
— calcul sur les nombres réels et les nombres complexes ;
— notion de racine d'un polynôme ;
— calcul du discriminant et manipulation des radicaux ;
— représentation géométrique des nombres complexes et formule de Moivre, lorsque les racines complexes sont abordées dans un cadre plus général.

Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :
— définir une équation du second degré et distinguer les cas réels et complexes ;
— établir et utiliser la formule du discriminant ;
— déterminer le nombre de racines réelles ou complexes ;
— factoriser un trinôme du second degré ;
— utiliser les relations entre les racines et les coefficients ;
— étudier le signe d'un trinôme à coefficients réels ;
— relier la résolution des équations du second degré à la factorisation des polynômes et à l'étude de fonctions polynomiales.

2 Introduction et définition

Une équation du second degré est une équation polynomiale de degré deux. Elle intervient dans de nombreux domaines : étude des fonctions quadratiques, problèmes géométriques, cinématique, optimisation et résolution d'équations polynomiales.

Définition 2.1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une équation de la forme

$$az^2 + bz + c = 0,$$

où $a, b, c \in \mathbb{K}$ et $a \neq 0$. L'inconnue est notée z.

Lorsque les coefficients sont réels, on peut rechercher les solutions dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$. Lorsque les coefficients sont complexes, les solutions sont naturellement recherchées dans $\mathbb{C}$.

On associe à cette équation le polynôme

$$P(z) = az^2 + bz + c.$$

Résoudre l'équation revient à déterminer les racines de P.

3 Résolution dans le cas réel

3.1 Mise sous forme canonique

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$. On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

En divisant par a, puis en complétant le carré, on obtient

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0,$$

puis

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

On introduit le discriminant

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}.$$

L'équation est donc équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Proposition 3.1 (Forme canonique)**.** *Le trinôme $ax^2 + bx + c$ s'écrit*

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

Démonstration. En développant le membre de droite, on trouve

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Après simplification, cette expression vaut

$$ax^2 + bx + c.$$

□

3.2 Théorème de résolution

Théorème 3.2 (Résolution dans $\mathbb{R}$)**.** *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a \neq 0$, et $\Delta = b^2 - 4ac$.*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles distinctes :*

$$\boxed{x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}.$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution réelle, appelée racine double :*

$$\boxed{x_0 = -\frac{b}{2a}}.$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.*

Démonstration. L'équation est équivalente à

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Le membre de gauche est un carré réel, donc il est positif ou nul. Si $\Delta < 0$, aucune solution réelle n'existe.

Si $\Delta = 0$, on obtient

$$x + \frac{b}{2a} = 0,$$

d'où $x = -b/(2a)$.

Si $\Delta > 0$, on peut prendre les deux racines carrées réelles opposées du membre de droite. On obtient les deux solutions annoncées. □

3.3 Exemples

Exemple 3.3. Résolvons dans $\mathbb{R}$:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0.$$

On a

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times 2 = 9.$$

Les solutions sont

$$x_1 = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}, \qquad x_2 = \frac{5+3}{4} = 2.$$

Ainsi,

$$2x^2 - 5x + 2 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-2).$$

Exemple 3.4. Résolvons dans $\mathbb{R}$:

$$x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 4 - 20 = -16 < 0.$$

L'équation n'a donc aucune solution réelle.

4 Résolution dans le cas complexe

4.1 Existence d'une racine carrée complexe

Proposition 4.1. *Tout nombre complexe possède au moins une racine carrée complexe.*

Démonstration. Soit $w = u + iv \in \mathbb{C}$. On cherche $z = x + iy$ tel que $z^2 = w$. Cette équation équivaut à

$$x^2 - y^2 = u, \qquad 2xy = v.$$

En utilisant

$$(x^2 + y^2)^2 = u^2 + v^2,$$

on peut choisir

$$x^2 = \frac{|w| + u}{2}, \qquad y^2 = \frac{|w| - u}{2},$$

avec des signes compatibles avec $2xy = v$. Si $w = 0$, la racine carrée est 0. Si $w \neq 0$, ces relations permettent de construire une racine carrée complexe. □

Remarque 4.2. Pour tout $w \in \mathbb{C}^*$, les deux racines carrées de w sont opposées. Pour $w = 0$, la seule racine carrée est 0.

4.2 Théorème fondamental de résolution

Théorème 4.3 (Résolution dans $\mathbb{C}$)**.** *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Posons*

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Pour toute racine carrée δ de Δ, les solutions de l'équation

$$az^2 + bz + c = 0$$

sont

$$\boxed{z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}}.$$

Si $\Delta \neq 0$, les deux solutions sont distinctes. Si $\Delta = 0$, elles coïncident et valent $-b/(2a)$.

Démonstration. En complétant le carré dans $\mathbb{C}$, on obtient

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Comme $\delta^2 = \Delta$, cette équation équivaut à

$$z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a}.$$

On en déduit les deux solutions annoncées. □

Corollaire 4.4. *Tout polynôme complexe de degré deux possède exactement deux racines complexes comptées avec leur multiplicité.*

4.3 Cas des coefficients réels

Lorsque $a, b, c \in \mathbb{R}$, les trois cas précédents se retrouvent dans $\mathbb{C}$:

— si $\Delta > 0$, les deux racines sont réelles et distinctes ;

— si $\Delta = 0$, la racine réelle est double ;

— si $\Delta < 0$, les racines sont complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}, \qquad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Exemple 4.5. Résolvons dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 5 = 0.$$

On a $\Delta = -16$. Les racines sont

$$z_1 = -1 + 2i, \qquad z_2 = -1 - 2i.$$

Le polynôme se factorise dans $\mathbb{C}$ sous la forme

$$z^2 + 2z + 5 = (z + 1 - 2i)(z + 1 + 2i).$$

5 Factorisation et relations entre les racines

5.1 Factorisation d'un trinôme

Proposition 5.1. *Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$, avec $a \neq 0$. Si z_1 et z_2 sont les racines de $P(z) = az^2 + bz + c$, comptées avec multiplicité, alors*

$$\boxed{P(z) = a(z - z_1)(z - z_2)}.$$

Démonstration. Le théorème de résolution fournit les racines de P. Le polynôme $a(z-z_1)(z-z_2)$ est de degré deux, de coefficient dominant a, et possède les mêmes racines que P, avec les mêmes multiplicités. Les deux polynômes sont donc égaux. □

5.2 Relations de Viète

Proposition 5.2 (Relations de Viète)**.** *Si z_1 et z_2 sont les racines de*

$$az^2 + bz + c = 0,$$

alors

$$\boxed{z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{z_1 z_2 = \frac{c}{a}}.$$

Démonstration. En développant la factorisation,

$$a(z - z_1)(z - z_2) = az^2 - a(z_1 + z_2)z + az_1z_2.$$

L'identification des coefficients donne les deux relations. □

Remarque 5.3. Ces relations permettent notamment de déterminer les coefficients d'un trinôme à partir de ses racines, ou de vérifier des solutions sans refaire tous les calculs du discriminant.

Exemple 5.4. Déterminons un polynôme unitaire réel de degré deux dont les racines sont 3 et -2. La somme des racines vaut 1 et leur produit vaut -6. Le polynôme recherché est donc

$$P(x) = x^2 - x - 6.$$

6 Signe d'un trinôme réel

Soit

$$P(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0,$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

6.1 Cas où le discriminant est positif

Si $\Delta > 0$, les racines réelles $x_1 < x_2$ permettent d'écrire

$$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Le signe du trinôme est celui de a à l'extérieur de l'intervalle $[x_1, x_2]$, et celui de $-a$ à l'intérieur de cet intervalle. Le trinôme s'annule en x_1 et x_2.

6.2 Cas où le discriminant est nul

Si $\Delta = 0$, alors

$$P(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Le trinôme est du signe de a, sauf en sa racine double où il s'annule.

6.3 Cas où le discriminant est négatif

Si $\Delta < 0$, le trinôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Il conserve donc le signe de a sur tout $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1. *Le signe d'un trinôme réel sur $\mathbb{R}$ est entièrement déterminé par le signe de son coefficient dominant et par ses racines réelles.*

Exemple 6.2. Étudions le signe de

$$P(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3).$$

On obtient

x	$-\infty$		2		3	$+\infty$
$P(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$

Ainsi, $P(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty, 2] \cup [3, +\infty[$.

7 Interprétation graphique

La fonction associée à un trinôme réel est

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Sa courbe représentative est une parabole d'axe vertical. Son sommet a pour abscisse

$$x_S = -\frac{b}{2a}$$

et pour ordonnée

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a}.$$

Le nombre de racines réelles correspond au nombre de points d'intersection de la parabole avec l'axe des abscisses :

— deux intersections si $\Delta > 0$;

— une intersection si $\Delta = 0$;

— aucune intersection si $\Delta < 0$.

Cette interprétation relie le calcul algébrique à la géométrie et à l'étude des fonctions.

8 Applications

8.1 Résolution d'un problème géométrique

Un rectangle a pour côtés x et $x+3$, exprimés dans une même unité. Son aire vaut 40 unités d'aire.

On cherche $x > 0$ tel que

$$x(x+3) = 40.$$

On obtient

$$x^2 + 3x - 40 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 9 + 160 = 169.$$

Les solutions sont

$$x = \frac{-3 \pm 13}{2},$$

soit $x = 5$ ou $x = -8$.

La contrainte géométrique $x > 0$ impose $x = 5$. Les côtés du rectangle mesurent donc 5 et 8 unités.

8.2 Détermination d'un paramètre

Déterminons les valeurs réelles de m pour lesquelles

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0$$

possède deux racines réelles distinctes.

Le discriminant est

$$\Delta = (-2m)^2 - 4(m+2) = 4(m^2 - m - 2) = 4(m-2)(m+1).$$

Il faut et il suffit que

$$\Delta > 0,$$

soit

$$(m-2)(m+1) > 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{m < -1 \quad \text{ou} \quad m > 2}.$$

9 Exercices

Les exercices suivants peuvent servir de support à une présentation orale, à une interrogation ou à un approfondissement du cours.

Exercice 1 – Résolution dans $\mathbb{R}$

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$:

a) $3x^2 - 7x + 2 = 0$;

b) $4x^2 + 4x + 1 = 0$;

c) $2x^2 + x + 3 = 0$;

d) $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Exercice 2 – Résolution dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + 4 = 0$;

b) $z^2 - 2z + 5 = 0$;

c) $2z^2 + (1 - i)z - i = 0$.

Exercice 3 – Factorisation

Factoriser dans $\mathbb{R}[x]$, lorsque cela est possible, puis dans $\mathbb{C}[z]$:

$$P(x) = x^2 - 2x + 5, \qquad Q(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Préciser les racines et leurs multiplicités.

Exercice 4 – Relations de Viète

Deux nombres réels ont pour somme 7 et pour produit 10. Déterminer ces deux nombres en les considérant comme les racines d'une équation du second degré.

Plus généralement, établir l'équation unitaire dont les racines sont u et v.

Exercice 5 – Signe d'un trinôme

Étudier le signe des polynômes suivants sur $\mathbb{R}$:

$$P(x) = 2x^2 - 3x - 2, \qquad Q(x) = -x^2 + 4x - 4.$$

Résoudre ensuite les inéquations

$$P(x) \geq 0, \qquad Q(x) < 0.$$

Exercice 6 – Équation avec paramètre

Déterminer, suivant les valeurs réelles du paramètre m, le nombre de solutions réelles de

$$x^2 - (m + 1)x + m = 0.$$

On cherchera également les valeurs de m pour lesquelles les solutions sont égales.

Exercice 7 – Problème géométrique

Un rectangle a un périmètre de 26 cm et une aire de 40 cm^2. Déterminer les dimensions possibles de ce rectangle.

Exercice 8 – Racines complexes conjuguées

Soit $P(z) = z^2 + az + b$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que si $z_0 \notin \mathbb{R}$ est une racine de P, alors $\overline{z_0}$ est également une racine.

En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}[z]$.

Exercice 9 – Somme et produit imposés

Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que l'équation

$$x^2 + ax + b = 0$$

admette deux racines réelles distinctes dont la somme est 4 et le produit est -5.

Exercice 10 – Approfondissement

Soient z_1, z_2 les racines de

$$az^2 + bz + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

Calculer, en fonction de a, b, c, les expressions

$$z_1^2 + z_2^2 \qquad \text{et} \qquad (z_1 - z_2)^2.$$

Interpréter la seconde expression à l'aide du discriminant.

10 Conclusion

La résolution d'une équation du second degré repose sur la mise sous forme canonique et l'introduction du discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Dans $\mathbb{R}$, le signe du discriminant détermine le nombre de solutions réelles. Dans $\mathbb{C}$, toute équation du second degré possède deux racines comptées avec leur multiplicité.

Les relations de Viète, la factorisation et l'étude du signe du trinôme complètent la méthode de résolution. Ces résultats constituent un lien important entre calcul algébrique, étude des fonctions polynomiales et interprétation géométrique.

11 Références bibliographiques

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes précisent les connaissances attendues sur les fonctions polynomiales, les équations et les nombres complexes.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports du jury du CAPES externe de mathématiques*. Les rapports permettent de situer les attendus de l'épreuve orale, la rigueur des démonstrations et la place des exercices.

[3] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Algèbre*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les polynômes, les racines et les structures algébriques.

[4] Hervé Queffélec et Claude Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod. Référence complémentaire pour les raisonnements mathématiques et les outils d'analyse.

[5] Jean-Pierre Escofier, *Toute l'algèbre de la licence*, Dunod. Ouvrage d'approfondissement sur les polynômes et les nombres complexes.