Leçon d'oral du CAPES de mathématiques
Module et argument d'un nombre complexe

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**

2 Introduction **1**

3 Module d'un nombre complexe **2**
3.1 Définition . . . 2
3.2 Propriétés fondamentales . . . 2
3.3 Interprétation géométrique . . . 3

4 Argument d'un nombre complexe **3**
4.1 Définition . . . 3
4.2 Un argument et ses différentes mesures . . . 4
4.3 Détermination d'un argument . . . 4

5 Forme trigonométrique **4**

6 Arguments des produits et des quotients **5**

7 Puissances et formule de Moivre **6**

8 Forme exponentielle **7**

9 Interprétations géométriques **7**
9.1 Produit par un nombre complexe . . . 7
9.2 Quotient de deux affixes . . . 7
9.3 Alignement et orthogonalité . . . 8

10 Applications **8**
10.1 Résolution d'une équation complexe . . . 8
10.2 Caractérisation d'un cercle . . . 8

11 Exercices **8**

12 Conclusion **10**

13 Références bibliographiques **10**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis

Cette leçon suppose connues les notions suivantes :

— définition de l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ et écriture algébrique $z = x + iy$;
— opérations sur les nombres complexes ;
— conjugué d'un nombre complexe ;
— repérage dans le plan et coordonnées cartésiennes ;
— trigonométrie dans le cercle trigonométrique ;
— formules d'addition des sinus et des cosinus ;
— notions de vecteur, de distance et d'angle orienté.

Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :
— définir le module et l'argument d'un nombre complexe ;
— interpréter géométriquement ces notions ;
— passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ;
— calculer les modules et les arguments de produits, quotients et puissances ;
— utiliser la forme exponentielle pour simplifier les calculs ;
— résoudre des problèmes géométriques à l'aide des nombres complexes ;
— distinguer un argument d'un argument principal et maîtriser les ambiguïtés liées à la mesure des angles.

2 Introduction

Un nombre complexe peut être représenté par un point du plan. Son écriture algébrique donne ses coordonnées cartésiennes, tandis que son module et son argument fournissent une description polaire.

Cette seconde représentation est particulièrement adaptée à l'étude des produits, des quotients, des puissances et de certaines transformations géométriques.

3 Module d'un nombre complexe

3.1 Définition

Définition 3.1. Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Le module de z est le réel positif ou nul défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Si M est le point d'affixe $z = x + iy$, alors $|z|$ est la distance entre l'origine O et le point M.

3.2 Propriétés fondamentales

Proposition 3.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a*

$$|z| \geq 0, \qquad |z| = 0 \iff z = 0, \qquad |\overline{z}| = |z|.$$

De plus,

$$\boxed{z\overline{z} = |z|^2}.$$

Démonstration. Écrivons $z = x + iy$. Alors

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2.$$

Ainsi,

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Le module est une racine carrée positive ou nulle ; il est nul si et seulement si $x = y = 0$, c'est-à-dire $z = 0$. Enfin, z et $\overline{z}$ ont les mêmes coordonnées en valeur absolue, donc leurs modules sont égaux. □

Proposition 3.3 (Module d'un produit et d'un quotient)**.** *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$\boxed{|zw| = |z|\,|w|}.$$

Si $w \neq 0$, alors

$$\boxed{\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}}.$$

Démonstration. On utilise la relation $|z|^2 = z\overline{z}$:

$$|zw|^2 = (zw)\overline{zw} = zw\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

Les modules étant positifs ou nuls, on en déduit $|zw| = |z||w|$.

Si $w \neq 0$, alors $1/w$ existe et

$$\left|\frac{z}{w}\right| = |z|\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

□

Proposition 3.4 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$\boxed{|z + w| \leq |z| + |w|}.$$

Démonstration. On a

$$|z + w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w}).$$

Or

$$\mathrm{Re}(z\overline{w}) \leq |z\overline{w}| = |z||w|.$$

Par conséquent,

$$|z + w|^2 \leq (|z| + |w|)^2.$$

Les deux membres étant positifs, l'inégalité annoncée en découle. □

Corollaire 3.5. *Pour tous $z, w \in \mathbb{C}$,*

$$\boxed{||z| - |w|| \leq |z - w|}.$$

Démonstration. L'inégalité triangulaire donne

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w|.$$

Ainsi, $|z| - |w| \leq |z - w|$. En échangeant z et w, on obtient $|w| - |z| \leq |z - w|$, ce qui conclut. □

3.3 Interprétation géométrique

Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b. La distance entre ces points vaut

$$\boxed{AB = |b - a|}.$$

En particulier :

— l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z| = r$, avec $r > 0$, est le cercle de centre O et de rayon r ;

— l'ensemble défini par $|z - a| = r$ est le cercle de centre d'affixe a et de rayon r ;

— l'ensemble défini par $|z - a| \leq r$ est le disque fermé correspondant.

Exemple 3.6. L'équation

$$|z - (2 + i)| = 3$$

décrit le cercle de centre d'affixe $2 + i$ et de rayon 3.

4 Argument d'un nombre complexe

4.1 Définition

Définition 4.1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$, où $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Un argument de z est un réel θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Autrement dit,

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Géométriquement, si M est le point d'affixe z, alors un argument de z est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque 4.2. Le nombre complexe nul ne possède pas d'argument : son module est nul et sa direction n'est pas définie.

4.2 Un argument et ses différentes mesures

Proposition 4.3. *Si θ est un argument de $z \neq 0$, alors l'ensemble des arguments de z est*

$$\boxed{\theta + 2k\pi, \qquad k \in \mathbb{Z}}.$$

Démonstration. Deux réels θ et φ vérifient

$$\cos\theta = \cos\varphi, \qquad \sin\theta = \sin\varphi$$

si et seulement si $\theta - \varphi \in 2\pi\mathbb{Z}$. Ils représentent donc le même point du cercle trigonométrique exactement lorsque leur différence est un multiple entier de 2π. □

Définition 4.4. On appelle argument principal d'un nombre complexe non nul la mesure de son argument choisie dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On le note ici $\mathrm{Arg}(z)$.

Remarque 4.5. Le choix de l'intervalle définissant l'argument principal dépend des conventions adoptées. Dans cette leçon, on retient $]-\pi, \pi]$.

4.3 Détermination d'un argument

Soit $z = x + iy \neq 0$. Si θ est un argument de z, alors

$$\cos\theta = \frac{x}{|z|}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{|z|}.$$

Ces deux égalités doivent être considérées simultanément afin de déterminer le quadrant et donc l'argument.

Exemple 4.6. Considérons

$$z = -1 + i.$$

Son module est

$$|z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

On a

$$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le point est situé dans le deuxième quadrant. Un argument est donc

$$\theta = \frac{3\pi}{4}.$$

La forme trigonométrique de z est

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

5 Forme trigonométrique

Théorème 5.1. *Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire sous la forme*

$$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)},$$

où $r = |z| > 0$ et θ est un argument de z.

Le réel r est unique et θ est déterminé modulo 2π.

Démonstration. Posons $z = x + iy \neq 0$ et $r = |z|$. Alors

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 = 1.$$

Le point de coordonnées $(x/r, y/r)$ appartient au cercle trigonométrique. Il existe donc un réel θ tel que

$$\frac{x}{r} = \cos\theta, \qquad \frac{y}{r} = \sin\theta.$$

Il vient

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

L'unicité de r résulte de la définition du module. L'angle est déterminé modulo 2π. □

Remarque 5.2. La forme algébrique $x + iy$ est adaptée à l'addition, tandis que la forme trigonométrique est particulièrement adaptée aux produits, aux quotients et aux puissances.

6 Arguments des produits et des quotients

Proposition 6.1. *Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Alors*

$$\boxed{\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}}.$$

De même,

$$\boxed{\arg\left(\frac{z}{w}\right) = \arg(z) - \arg(w) \pmod{2\pi}}.$$

Démonstration. Écrivons

$$z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad w = s(\cos\beta + i\sin\beta),$$

avec $r, s > 0$.

En utilisant les formules trigonométriques d'addition,

$$\begin{aligned} zw &= rs(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) \\ &= rs\big(\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\big). \end{aligned}$$

Le module de zw est rs et un argument est $\alpha + \beta$.

Pour le quotient, on utilise

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{s}\big(\cos(-\beta) + i\sin(-\beta)\big).$$

Il en résulte que le module du quotient est r/s et qu'un argument est $\alpha - \beta$. □

Corollaire 6.2. *Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,*

$$\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \pmod{2\pi},$$

et

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \pmod{2\pi}.$$

Exemple 6.3. Soient

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

et

$$w = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Alors

$$|zw| = 6$$

et un argument de zw est

$$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{12}.$$

Ainsi,

$$zw = 6\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right).$$

7 Puissances et formule de Moivre

Théorème 7.1 (Formule de Moivre)**.** *Pour tout réel θ et tout entier relatif n,*

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

lorsque les puissances négatives sont interprétées pour un nombre complexe non nul.

Démonstration. Pour $n \geq 0$, le résultat se démontre par récurrence. Il est vrai pour $n = 0$. Si le résultat est vrai au rang n, alors

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^{n+1} &= (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \\ &\quad \times (\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta).\end{aligned}$$

La formule est donc vraie pour tout entier naturel.

Pour $n < 0$, on utilise le fait que

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{-1} = \cos\theta - i\sin\theta = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta).$$

On retrouve alors la formule pour les entiers négatifs. □

Corollaire 7.2. *Si*

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r > 0,$$

alors, pour tout entier relatif n,

$$\boxed{|z^n| = r^n}, \qquad \boxed{\arg(z^n) = n\theta \pmod{2\pi}}.$$

Exemple 7.3. Calculons

$$z = (1+i)^8.$$

On sait que

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Ainsi,

$$z = (\sqrt{2})^8\,(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16.$$

8 Forme exponentielle

La formule d'Euler s'écrit

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}.$$

Elle permet de représenter un nombre complexe non nul sous la forme

$$\boxed{z = re^{i\theta}},$$

où $r = |z| > 0$ et θ est un argument de z.

Les règles de calcul deviennent

$$re^{i\alpha}\,se^{i\beta} = rs\,e^{i(\alpha+\beta)}$$

et

$$\frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \frac{r}{s}e^{i(\alpha-\beta)}.$$

La formule de Moivre devient

$$\boxed{(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}}.$$

Remarque 8.1. La notation exponentielle simplifie les calculs, mais l'égalité $e^{i\alpha} = e^{i\beta}$ équivaut à $\alpha - \beta \in 2\pi\mathbb{Z}$. L'argument reste donc défini modulo 2π.

9 Interprétations géométriques

9.1 Produit par un nombre complexe

Soit $a = re^{i\theta}$, avec $r > 0$. La transformation

$$z \longmapsto az$$

combine une rotation d'angle θ et une homothétie de rapport r, toutes deux de centre l'origine.

En effet, si $z = \rho e^{i\alpha}$, alors

$$az = r\rho e^{i(\alpha+\theta)}.$$

Le module est multiplié par r et l'argument augmente de θ modulo 2π.

9.2 Quotient de deux affixes

Pour deux points distincts de l'origine, d'affixes z_A et z_B, le quotient

$$\frac{z_B}{z_A}$$

a pour module

$$\frac{OA}{OB}$$

ou, plus précisément, OB/OA lorsque z_A est l'affixe de A et z_B celle de B. Son argument est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

Ainsi,

$$\left|\frac{z_B}{z_A}\right| = \frac{OB}{OA}, \qquad \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

Remarque 9.1. Dans une présentation orale, il faut distinguer soigneusement le quotient z_B/z_A du quotient z_A/z_B : leurs modules sont inverses et leurs arguments sont opposés.

9.3 Alignement et orthogonalité

Soient A, B, C trois points d'affixes respectives a, b, c, avec $a \neq b$ et $a \neq c$.

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}.$$

Ils forment un angle droit en A si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R},$$

lorsque les quotients sont définis.

Ces critères permettent de traduire des propriétés géométriques en propriétés algébriques des nombres complexes.

10 Applications

10.1 Résolution d'une équation complexe

Résolvons

$$z^4 = 16.$$

On écrit

$$16 = 16e^{i2k\pi}, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Les solutions ont pour module 2 et pour argument

$$\frac{k\pi}{2}.$$

Il suffit de considérer quatre arguments distincts modulo 2π :

$$\boxed{z_k = 2e^{ik\pi/2}, \qquad k \in \{0,1,2,3\}.}$$

Les solutions sont donc

$$2, \quad 2i, \quad -2, \quad -2i.$$

10.2 Caractérisation d'un cercle

Déterminons l'ensemble des points M d'affixe z tels que

$$|z - (1+i)| = 2.$$

Il s'agit du cercle de centre d'affixe $1+i$ et de rayon 2.

Cette équation est une traduction directe de la définition du module et de l'interprétation de $|z-a|$ comme distance.

11 Exercices

Exercice 1 – Calcul de modules

Calculer les modules des nombres complexes suivants :

$$z_1 = 3+4i, \qquad z_2 = -5+12i, \qquad z_3 = 2-2i.$$

Vérifier ensuite la relation $|z|^2 = z\overline{z}$.

Exercice 2 – Arguments

Déterminer un argument et l'argument principal des nombres :

$$z_1 = 1+i, \qquad z_2 = -1+i, \qquad z_3 = -\sqrt{3}-i.$$

Préciser tous les arguments de chacun de ces nombres.

Exercice 3 – Forme trigonométrique

Écrire sous forme trigonométrique :

$$z_1 = 1-i, \qquad z_2 = -\sqrt{3}+i, \qquad z_3 = -2i.$$

Pour chacun, déterminer le module et un argument.

Exercice 4 – Produits et quotients

Soient

$$z = 2e^{i\pi/3}, \qquad w = 3e^{-i\pi/4}.$$

Calculer sous forme exponentielle :

$$zw, \qquad \frac{z}{w}, \qquad \frac{z^2}{w}.$$

Donner à chaque fois le module et un argument.

Exercice 5 – Puissances

Calculer :

$$(1+i)^8, \qquad (\sqrt{3}+i)^6, \qquad \left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^{10}.$$

On utilisera la formule de Moivre.

Exercice 6 – Équations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^3 = 8, \qquad z^4 = -16, \qquad z^6 = 1.$$

Représenter les solutions dans le plan complexe et décrire leur répartition géométrique.

Exercice 7 – Lieu géométrique

Décrire géométriquement les ensembles suivants :

$$|z-2i| = 3, \qquad |z+1-i| = 2, \qquad |z| < 1.$$

Préciser les centres, les rayons et le type de région considéré.

Exercice 8 – Inégalité triangulaire

Démontrer que

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

Étudier les conditions d'égalité lorsque z et w sont non nuls.

Exercice 9 – Géométrie complexe

Soient A, B, C d'affixes a, b, c, avec $a \neq b$. Montrer que A, B, C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R},$$

lorsque $c \neq a$. Donner une interprétation géométrique de l'argument de ce quotient.

Exercice 10 – Approfondissement

Soient $z, w \in \mathbb{C}^*$. Montrer que

$$\left|\frac{z}{w}\right| = 1 \iff |z| = |w|.$$

Interpréter cette propriété géométriquement lorsque z et w sont les affixes de deux points du plan.

12 Conclusion

Le module et l'argument constituent deux outils complémentaires pour décrire un nombre complexe.

Le module traduit une distance à l'origine et se comporte multiplicativement :

$$|zw| = |z||w|.$$

L'argument décrit une direction et transforme les produits en sommes d'angles :

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w) \pmod{2\pi}.$$

La forme trigonométrique et la forme exponentielle permettent ainsi de simplifier les calculs, de résoudre des équations complexes et de traduire des propriétés géométriques en relations algébriques.

13 Références bibliographiques

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Référence pour les attendus concernant les nombres complexes, la trigonométrie et les représentations géométriques.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports du jury du CAPES externe de mathématiques.* Ces rapports précisent les attentes relatives à la rigueur, aux démonstrations et à la présentation des exemples à l'oral.

[3] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Algèbre*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les nombres complexes et les méthodes de calcul algébrique.

[4] Hervé Queffélec et Claude Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod. Référence complémentaire pour les raisonnements mathématiques et les outils d'analyse.

[5] Jean-Pierre Escofier, *Toute l'algèbre de la licence*, Dunod. Ouvrage d'approfondissement sur les structures algébriques et les nombres complexes.