Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Transformations planes et nombres complexes

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**
1.1 Prérequis 1
1.2 Objectifs 1

2 Le plan complexe **1**
2.1 Affixe d'un point 1
2.2 Interprétation du module et de l'argument 2

3 Translations **2**

4 Rotations **2**

5 Homothéties **3**

6 Similitudes directes **3**
6.1 Centre d'une similitude directe 4

7 Compositions de transformations **4**
7.1 Composition de deux similitudes directes 4
7.2 Compositions particulières 4

8 Similitudes indirectes et conjugaison **5**

9 Méthode de résolution d'un problème géométrique **5**

10 Exercices proposés **5**

11 Éléments de correction **6**

12 Pistes pédagogiques pour l'oral **8**

13 Références bibliographiques **8**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose maîtrisées les notions suivantes :

— nombres complexes, formes algébrique et trigonométrique ;
— module et argument d'un nombre complexe non nul ;
— interprétation géométrique des opérations sur les nombres complexes ;
— repérage cartésien dans le plan et distance entre deux points ;
— trigonométrie élémentaire et formules d'addition ;
— notions de vecteur, d'angle orienté et de produit scalaire.

1.2 Objectifs

L'objectif est de comprendre comment les nombres complexes permettent de décrire et de caractériser les transformations du plan. On cherche en particulier à :

- traduire une transformation géométrique en une expression complexe ;
- caractériser les translations, rotations, homothéties et similitudes directes ;
- déterminer les éléments caractéristiques d'une transformation à partir de son écriture complexe ;
- étudier les compositions et les points fixes ;
- résoudre des problèmes de géométrie en utilisant le calcul complexe, sans perdre de vue l'interprétation géométrique.

2 Le plan complexe

2.1 Affixe d'un point

On identifie le plan euclidien orienté à $\mathbb{C}$. À tout point M de coordonnées (x, y) dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe son affixe

$$z_M = x + iy.$$

Si A et B ont pour affixes respectives a et b, alors

$$\overrightarrow{AB} \quad \longleftrightarrow \quad b - a,$$

et

$$AB = |b - a|.$$

Pour $A \neq B$, l'argument de $b - a$ est une mesure de l'angle orienté entre l'axe réel et le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2.2 Interprétation du module et de l'argument

Pour $z \neq 0$, on peut écrire

$$z = re^{i\theta}, \qquad r = |z| > 0,$$

où θ est un argument de z, défini modulo 2π.

Les identités fondamentales sont

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \qquad \arg(z_1 z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}.$$

La multiplication par un complexe non nul combine donc une modification de longueur et une rotation.

3 Translations

Définition 3.1. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. La translation de vecteur d'affixe ω est la transformation qui, à tout point d'affixe z, associe le point d'affixe

$$z' = z + \omega.$$

Propriété 3.2. *La transformation $z \mapsto z + \omega$ conserve les distances et les angles orientés. Si $\omega \neq 0$, elle n'a aucun point fixe. Si $\omega = 0$, elle est l'identité.*

Démonstration. Pour deux points d'affixes z_1, z_2, leurs images ont pour affixes $z_1+\omega$ et $z_2+\omega$. Ainsi,

$$|(z_2+\omega)-(z_1+\omega)| = |z_2-z_1|.$$

La distance est donc conservée.

Un point fixe vérifierait $z+\omega = z$, soit $\omega = 0$. □

Exemple 3.3. L'application $z \mapsto z+2-i$ est la translation de vecteur de coordonnées $(2,-1)$.

4 Rotations

Définition 4.1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et soit $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre d'affixe a et d'angle θ est la transformation d'écriture complexe

$$\boxed{z'-a = e^{i\theta}(z-a).}$$

De manière équivalente,

$$\boxed{z' = e^{i\theta}z + a(1-e^{i\theta}).}$$

Propriété 4.2. *Une rotation conserve les distances et les angles orientés. Son centre est son unique point fixe si* $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Démonstration. Pour deux points d'affixes z_1, z_2, les affixes de leurs images satisfont

$$z_2'-z_1' = e^{i\theta}(z_2-z_1).$$

Comme $|e^{i\theta}| = 1$, on obtient

$$|z_2'-z_1'| = |z_2-z_1|.$$

De plus, la multiplication par $e^{i\theta}$ ajoute θ à l'argument du vecteur.

Un point fixe vérifie

$$z-a = e^{i\theta}(z-a).$$

Si $e^{i\theta} \neq 1$, cette égalité impose $z = a$. □

Exemple 4.3. La rotation de centre d'affixe $1+i$ et d'angle $\pi/2$ s'écrit

$$z'-(1+i) = i\big(z-(1+i)\big),$$

soit

$$z' = iz+2.$$

5 Homothéties

Définition 5.1. Soit $a \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre a et de rapport k est définie par

$$\boxed{z'-a = k(z-a).}$$

Ainsi,

$$z' = kz+(1-k)a.$$

Propriété 5.2. *Pour tous points* M, N*, leurs images* M', N' *vérifient*

$$M'N' = |k|\,MN.$$

Si $k \neq 1$*, le centre* a *est un point fixe. Si* $k = 1$*, la transformation est l'identité.*

Démonstration. On a

$$z_{N'} - z_{M'} = k(z_N - z_M).$$

En prenant les modules,

$$|z_{N'} - z_{M'}| = |k|\,|z_N - z_M|.$$

La conservation des rapports de longueurs en découle. □

Remarque 5.3. Si $k > 0$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AM'}$ ont même direction. Si $k < 0$, ils ont des directions opposées. Le cas $k = 0$ donne la transformation constante qui envoie tout point sur le centre.

6 Similitudes directes

Définition 6.1. Une similitude directe est une transformation du plan qui multiplie toutes les distances par un même réel strictement positif et conserve les angles orientés.

Théorème 6.2. *Toute similitude directe du plan s'écrit sous la forme*

$$\boxed{z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.}$$

Son rapport est $|a|$ *et un angle de la similitude est* $\arg(a)$.

Démonstration. Considérons une application de la forme $f(z) = az + b$, avec $a \neq 0$. Pour deux points d'affixes z_1, z_2,

$$f(z_2) - f(z_1) = a(z_2 - z_1).$$

Par conséquent,

$$|f(z_2) - f(z_1)| = |a|\,|z_2 - z_1|.$$

Les distances sont multipliées par $|a|$. De plus,

$$\arg\big(f(z_2) - f(z_1)\big) \equiv \arg(a) + \arg(z_2 - z_1) \pmod{2\pi},$$

ce qui montre la conservation des angles orientés.

Réciproquement, une similitude directe est déterminée par l'image de deux points distincts. En utilisant les affixes de ces points et de leurs images, on obtient une expression affine complexe $f(z) = az + b$, avec $a \neq 0$. □

6.1 Centre d'une similitude directe

Supposons $a \neq 1$. Un point fixe vérifie

$$z = az + b,$$

d'où

$$\boxed{z = \frac{b}{1-a}.}$$

La similitude possède donc un unique centre.

Si $a = 1$ et $b \neq 0$, il s'agit d'une translation non triviale, sans point fixe. Si $a = 1$ et $b = 0$, il s'agit de l'identité.

Exemple 6.3. Considérons

$$f(z) = (1+i)z + 2.$$

Le rapport de la similitude est

$$|1+i| = \sqrt{2},$$

et un angle est $\pi/4$ modulo 2π. Son centre a pour affixe

$$z_0 = \frac{2}{1-(1+i)} = \frac{2}{-i} = 2i.$$

7 Compositions de transformations

7.1 Composition de deux similitudes directes

Soient

$$f(z) = az + b, \qquad g(z) = cz + d,$$

avec $a, c \neq 0$. Alors

$$(g \circ f)(z) = c(az + b) + d,$$

donc

$$\boxed{(g \circ f)(z) = ac\, z + cb + d.}$$

La composée est encore une similitude directe, de rapport $|a||c|$ et d'angle

$$\arg(a) + \arg(c) \pmod{2\pi}.$$

7.2 Compositions particulières

- La composée de deux translations est une translation.
- La composée de deux homothéties de même centre est une homothétie de rapport égal au produit des rapports.
- La composée de deux rotations de même centre est une rotation de même centre et d'angle égal à la somme des angles, modulo 2π.
- La composée de deux similitudes directes est une similitude directe, mais son centre n'est pas nécessairement le centre de l'une ou l'autre des transformations.

Exemple 7.1. Soient

$$f(z) = iz + 1, \qquad g(z) = 2z - i.$$

Alors

$$(g \circ f)(z) = 2(iz + 1) - i = 2iz + 2 - i.$$

La composée est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\pi/2$ modulo 2π.

8 Similitudes indirectes et conjugaison

La conjugaison complexe permet de décrire des transformations qui renversent l'orientation.

Définition 8.1. Une similitude indirecte s'écrit sous la forme

$$\boxed{z' = a\overline{z} + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.}$$

Propriété 8.2. *La conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est la réflexion par rapport à l'axe réel. Plus généralement, toute application $z \mapsto a\overline{z} + b$, avec $a \neq 0$, multiplie les distances par $|a|$ et renverse l'orientation.*

En effet,

$$|a\overline{z_2} + b - (a\overline{z_1} + b)| = |a|\,|\overline{z_2 - z_1}| = |a|\,|z_2 - z_1|.$$

Cette écriture permet notamment d'étudier les symétries axiales et les compositions de transformations directes et indirectes.

9 Méthode de résolution d'un problème géométrique

Pour exploiter efficacement les nombres complexes, on peut suivre la démarche suivante :

1. choisir un repère orthonormé direct adapté à la figure ;
2. noter z l'affixe d'un point quelconque ;
3. traduire la transformation en une relation entre z et z' ;
4. identifier la nature de la transformation en comparant avec les formes usuelles ;
5. déterminer, si nécessaire, le centre, le rapport et l'angle ;
6. revenir à la géométrie pour interpréter le résultat.

Il est important de distinguer une preuve géométrique d'une simple vérification numérique sur quelques points. Une expression complexe permet de démontrer des propriétés pour tous les points du plan.

10 Exercices proposés

Exercice 10.1 (Translation)**.** Dans le plan complexe, on considère l'application

$$f(z) = z + 3 - 2i.$$

a) Déterminer la nature de f.

b) Donner les coordonnées du vecteur de translation.

c) Déterminer l'image du point d'affixe $2 + i$.

d) L'application possède-t-elle un point fixe ?

Exercice 10.2 (Rotation)**.** Soit

$$f(z) = iz + 1 - i.$$

a) Montrer que f est une rotation.

b) Déterminer son angle et son centre.

c) Calculer l'image du point d'affixe 2.

d) Vérifier que le centre est un point fixe.

Exercice 10.3 (Homothétie)**.** On considère

$$f(z) = -2z + 3 + 2i.$$

a) Identifier la transformation.

b) Déterminer son rapport et son centre.

c) Déterminer l'image du point d'affixe $1 + i$.

d) Expliquer le rôle du signe du rapport.

Exercice 10.4 (Similitude directe)**.** Soit

$$f(z) = (1 + i)z + 2.$$

a) Déterminer le rapport et un angle de la similitude.

b) Calculer l'affixe de son centre.

c) Déterminer l'image des points d'affixes 0 et 1.

d) Vérifier la relation entre la longueur du segment image et celle du segment initial.

Exercice 10.5 (Composition)**.** On considère

$$f(z) = iz + 2, \qquad g(z) = 2z - 1.$$

a) Calculer les expressions complexes de $g \circ f$ et $f \circ g$.

b) Comparer les deux applications.

c) Déterminer leurs rapports et leurs angles.

d) Expliquer pourquoi la composition des applications affines complexes n'est pas, en général, commutative.

Exercice 10.6 (Point fixe)**.** Soit $f(z) = az + b$, avec $a \neq 0$.

a) Résoudre l'équation $f(z) = z$ lorsque $a \neq 1$.

b) Étudier les cas $a = 1$, $b = 0$ et $a = 1$, $b \neq 0$.

c) Interpréter géométriquement les résultats.

Exercice 10.7 (Similitude indirecte)**.** On considère

$$f(z) = i\overline{z} + 1.$$

a) Montrer que f conserve les distances.

b) Résoudre l'équation $f(z) = z$.

c) Déterminer l'ensemble des points fixes.

d) Expliquer pourquoi cette transformation renverse l'orientation.

Exercice 10.8 (Problème de synthèse)**.** Soient A, B et C trois points d'affixes respectives a, b et c. On suppose $a \neq b$ et l'on considère une similitude directe envoyant A sur B et B sur C.

a) Déterminer les coefficients u et v de l'écriture $z' = uz + v$.

b) À quelle condition la similitude est-elle une isométrie ?

c) À quelle condition est-elle une translation ?

d) Dans le cas où elle n'est pas une translation, déterminer son centre.

11 Éléments de correction

Exercice 1

La transformation est la translation de vecteur d'affixe $3 - 2i$. L'image de $2 + i$ a pour affixe $5 - i$. Si le vecteur est non nul, la translation n'a aucun point fixe.

Exercice 2

On écrit

$$f(z) - z_0 = i(z - z_0).$$

Le centre vérifie $z_0 = iz_0 + 1 - i$, d'où $z_0 = 1$. Il s'agit d'une rotation d'angle $\pi/2$ et de centre d'affixe 1. L'image de 2 a pour affixe $1 + i$.

Exercice 3

Le coefficient multiplicatif est -2. Le rapport est 2 et l'angle vaut π modulo 2π. Le centre vérifie

$$z_0 = -2z_0 + 3 + 2i,$$

donc

$$z_0 = 1 + \frac{2}{3}i.$$

Exercice 4

Le rapport vaut $\sqrt{2}$ et l'angle vaut $\pi/4$. Le centre a pour affixe

$$z_0 = \frac{2}{1-(1+i)} = 2i.$$

Exercice 5

On obtient

$$(g \circ f)(z) = 2iz + 3, \qquad (f \circ g)(z) = 2iz + 2 - i.$$

Les coefficients multiplicatifs sont identiques, mais les termes constants diffèrent : les deux similitudes ont le même rapport et le même angle, mais ne sont pas égales.

Exercice 6

Si $a \neq 1$, l'unique point fixe est

$$z_0 = \frac{b}{1-a}.$$

Si $a = 1$ et $b = 0$, l'application est l'identité. Si $a = 1$ et $b \neq 0$, elle est une translation non triviale et n'a aucun point fixe.

Exercice 7

L'équation $z = i\overline{z} + 1$ s'écrit, en posant $z = x + iy$,

$$x + iy = i(x - iy) + 1 = (y + 1) + ix.$$

Ainsi,

$$x = y + 1, \qquad y = x.$$

On obtient $x = y = -1$, donc le seul point fixe a pour affixe $-1 - i$. La transformation est une similitude indirecte de rapport 1, donc une isométrie indirecte.

Exercice 8

L'application vérifie

$$ua + v = b, \qquad ub + v = c.$$

En soustrayant les deux égalités,

$$u = \frac{c-b}{b-a}, \qquad v = b - ua.$$

La similitude est une isométrie si $|u| = 1$, et une translation si $u = 1$. Si $u \neq 1$, son centre a pour affixe

$$z_0 = \frac{v}{1-u}.$$

12 Pistes pédagogiques pour l'oral

Cette leçon se prête à une présentation articulant algèbre et géométrie. Il est pertinent de commencer par la multiplication complexe et son interprétation en termes de module et d'argument, puis d'introduire les transformations usuelles avant d'étudier les similitudes.

Une stratégie efficace consiste à faire conjecturer la nature d'une transformation à partir de son expression complexe, puis à démontrer les propriétés annoncées. On peut également

comparer une approche vectorielle et une approche complexe pour souligner l'intérêt du choix d'un outil adapté.

Les difficultés fréquentes sont :

— confondre le rapport d'une similitude et le module de son coefficient multiplicatif ;

— oublier que les arguments sont définis modulo 2π ;

— confondre le centre d'une transformation et l'origine du repère ;

— négliger les cas particuliers $a = 1$ ou $a = 0$;

— identifier une transformation sans justifier la conservation des distances ou des angles.

On peut prolonger cette leçon par l'étude des configurations inscrites dans le plan complexe, des racines de l'unité, des polygones réguliers ou de la résolution de problèmes de construction.

13 Références bibliographiques

1. Ministère de l'Éducation nationale, programmes de mathématiques du lycée général et technologique, notamment les parties consacrées aux nombres complexes et à la géométrie. https://www.education.gouv.fr/.
2. Ministère de l'Éducation nationale, programme et ressources du concours du CAPES externe de mathématiques. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.
3. Tout ouvrage de terminale générale traitant des nombres complexes, de leur forme trigonométrique et de leurs applications géométriques.
4. Tout manuel de géométrie affine et euclidienne abordant les isométries, les homothéties et les similitudes du plan.
5. Tout ouvrage de préparation à l'épreuve orale du CAPES de mathématiques présentant les leçons de géométrie et les exercices associés.

Remarque bibliographique : les références institutionnelles ci-dessus sont des portails généraux. Pour une préparation effective au concours, il convient de consulter les programmes, rapports de jury et textes officiels correspondant à la session visée, ainsi que les éditions précises des manuels effectivement utilisés.