Leçon d'oral de CAPES
Exemples d'utilisation des nombres complexes

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Rappels sur les nombres complexes **2**
2.1 Forme algébrique 2
2.2 Forme trigonométrique 2

3 Première application : résolution d'équations **3**
3.1 Résolution d'équations polynomiales 3
3.2 Racines n-ièmes de l'unité 3

4 Deuxième application : géométrie du plan **3**
4.1 Distance et milieu 3
4.2 Alignement de trois points 4
4.3 Orthogonalité 4

5 Troisième application : transformations planes **4**
5.1 Translations 4
5.2 Rotations 5
5.3 Homothéties et similitudes directes 5
5.4 Caractérisation d'une similitude directe 5

6 Quatrième application : trigonométrie **6**
6.1 Formules d'addition 6
6.2 Formules de duplication 6
6.3 Sommes de cosinus 6

7 Cinquième application : étude d'une configuration **7**
7.1 Caractérisation d'un carré 7
7.2 Une méthode générale 7

8 Ouvertures et limites **7**

9 Liste d'exercices **7**

10 Éléments de correction **9**

11 Conclusion **11**

1 Introduction

Les nombres complexes constituent un outil fondamental des mathématiques, car ils permettent de relier l'algèbre, la géométrie et la trigonométrie. Introduits pour donner un sens à certaines équations algébriques sans solution réelle, ils trouvent aujourd'hui des applications dans de nombreux domaines.

Dans le plan, un nombre complexe peut représenter un point ou un vecteur. La multiplication par un nombre complexe non nul permet de décrire une similitude directe, tandis que les puissances et les racines complexes facilitent l'étude des configurations géométriques et des équations polynomiales.

Cette leçon propose plusieurs exemples d'utilisation des nombres complexes, en privilégiant les liens entre les calculs algébriques et leurs interprétations géométriques.

Prérequis et objectifs. Les prérequis sont la connaissance des nombres réels, des équations du second degré, des vecteurs du plan, des coordonnées cartésiennes, des transformations géométriques usuelles et des relations trigonométriques. Il est également souhaitable de connaître la forme algébrique d'un nombre complexe, son conjugué, son module et sa forme trigonométrique.

L'objectif est de savoir mobiliser les nombres complexes pour résoudre des équations, caractériser des configurations géométriques, étudier des rotations et des homothéties, démontrer des alignements ou des orthogonalités, et établir des identités trigonométriques. Il s'agit aussi de comprendre comment un même calcul complexe peut recevoir plusieurs interprétations.

2 Rappels sur les nombres complexes

2.1 Forme algébrique

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique

$$z = a + \mathrm{i}b, \qquad a, b \in \mathbb{R},$$

où $\mathrm{i}^2 = -1$.

On appelle :

— partie réelle de z : $\mathrm{Re}(z) = a$;

— partie imaginaire de z : $\mathrm{Im}(z) = b$;

— conjugué de z : $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$;

— module de z : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Pour $z \neq 0$, on a

$$z\overline{z} = |z|^2, \qquad \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

2.2 Forme trigonométrique

Pour tout complexe non nul z, il existe un réel θ tel que

$$z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta).$$

Le réel θ, défini modulo 2π, est un argument de z.

La formule de Moivre donne, pour tout entier n,

$$z^n = |z|^n\big(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\big).$$

Cette formule est particulièrement utile pour calculer des puissances, résoudre certaines équations et étudier des polygones réguliers.

3 Première application : résolution d'équations

3.1 Résolution d'équations polynomiales

L'introduction des nombres complexes permet de résoudre des équations qui n'admettent pas de solution réelle.

Exemple 3.1. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 5 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 5 = -16.$$

Les solutions sont donc

$$z = \frac{2 \pm 4\mathrm{i}}{2} = 1 \pm 2\mathrm{i}.$$

L'équation ne possède aucune solution réelle, mais elle admet deux solutions complexes conjuguées.

3.2 Racines n-ièmes de l'unité

On cherche les solutions de

$$z^n = 1, \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

Comme $|z|^n = 1$, on obtient $|z| = 1$. En écrivant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, l'équation devient

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = 1.$$

Les solutions sont

$$z_k = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}k\pi/n}, \qquad k = 0, \ldots, n-1.$$

Elles sont distinctes et constituent les sommets d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

Exemple 3.2. Les racines cubiques de l'unité sont

$$1, \qquad -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elles sont les affixes des sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans le cercle unité.

Intérêt. Cette application met en évidence le lien entre équations polynomiales, trigonométrie et géométrie des polygones réguliers.

4 Deuxième application : géométrie du plan

4.1 Distance et milieu

Soient A et B deux points d'affixes respectives a et b.
La distance entre les deux points est donnée par

$$AB = |b - a|.$$

L'affixe du milieu I de $[AB]$ est

$$z_I = \frac{a+b}{2}.$$

Ces deux formules permettent de traduire des propriétés métriques en relations algébriques.

Exemple 4.1. Soient A, B et C d'affixes

$$a = 1 + \mathrm{i}, \qquad b = 3 + \mathrm{i}, \qquad c = 2 + 3\mathrm{i}.$$

On calcule

$$AB = |b - a| = |2| = 2,$$
$$AC = |c - a| = |1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5},$$

et

$$BC = |c - b| = |-1 + 2\mathrm{i}| = \sqrt{5}.$$

Ainsi, $AC = BC$: le triangle ABC est isocèle en C.

4.2 Alignement de trois points

Soient A, B et C trois points distincts d'affixes a, b et c.
Si $a \neq b$, les points A, B et C sont alignés si et seulement si

$$\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}.$$

En effet, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires si et seulement si leurs affixes $b - a$ et $c - a$ sont proportionnelles par un réel.

Exemple 4.2. Considérons les points d'affixes

$$a = 1 + \mathrm{i}, \qquad b = 3 + 2\mathrm{i}, \qquad c = 5 + 3\mathrm{i}.$$

On a

$$\frac{c - a}{b - a} = \frac{4 + 2\mathrm{i}}{2 + \mathrm{i}} = 2.$$

Le quotient est réel : les points A, B et C sont alignés.

4.3 Orthogonalité

Deux vecteurs non nuls d'affixes u et v sont orthogonaux si et seulement si

$$\mathrm{Re}(u\overline{v}) = 0.$$

En effet, le produit scalaire des vecteurs correspondants vaut

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathrm{Re}(u\overline{v}).$$

Exemple 4.3. Soient $u = 1 + \mathrm{i}$ et $v = 1 - \mathrm{i}$. Alors

$$u\overline{v} = (1 + \mathrm{i})^2 = 2\mathrm{i}.$$

Sa partie réelle est nulle : les vecteurs sont orthogonaux.

Bilan. Les nombres complexes permettent de traiter des problèmes de distance, de milieu, d'alignement et d'orthogonalité sans recourir systématiquement aux coordonnées cartésiennes.

5 Troisième application : transformations planes

5.1 Translations

La translation de vecteur d'affixe b transforme un point d'affixe z en un point d'affixe z' tel que

$$z' = z + b.$$

L'effet de la transformation se traduit donc par une simple addition.

5.2 Rotations

Une rotation de centre d'affixe ω et d'angle θ transforme z en

$$z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega),$$

soit

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z + \omega(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}).$$

Pour une rotation de centre O d'affixe nulle, la formule se réduit à

$$z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} z.$$

Exemple 5.1. La rotation de centre O et d'angle $\pi/2$ est donnée par

$$z' = \mathrm{i}z.$$

Si $z = x + \mathrm{i}y$, alors

$$z' = -y + \mathrm{i}x.$$

Les coordonnées (x, y) deviennent donc $(-y, x)$. Cette transformation conserve les distances à l'origine et effectue un quart de tour direct.

5.3 Homothéties et similitudes directes

Une homothétie de centre d'affixe ω et de rapport réel k s'écrit

$$z' - \omega = k(z - \omega).$$

Plus généralement, une similitude directe de centre ω, de rapport $\rho > 0$ et d'angle θ s'écrit

$$z' - \omega = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z - \omega).$$

La multiplication par $\rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ combine une rotation et une homothétie.

Exemple 5.2. La transformation

$$z' = (1 + \mathrm{i})z$$

est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\pi/4$, car

$$1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4}.$$

Elle multiplie toutes les distances par $\sqrt{2}$ et ajoute un angle de $\pi/4$ aux directions.

5.4 Caractérisation d'une similitude directe

Une application de la forme

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C},$$

est une similitude directe de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

En effet,

$$|z'_1 - z'_2| = |a|\, |z_1 - z_2|.$$

Cette expression permet de reconnaître une transformation à partir de son écriture complexe.

6 Quatrième application : trigonométrie

6.1 Formules d'addition

La formule

$$(\cos a + \mathrm{i}\sin a)(\cos b + \mathrm{i}\sin b) = \cos(a+b) + \mathrm{i}\sin(a+b)$$

conduit, par identification des parties réelle et imaginaire, aux formules

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

6.2 Formules de duplication

En prenant $a = b = x$, on obtient

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x,$$

$$\sin(2x) = 2\sin x \cos x.$$

En utilisant $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, on déduit également

$$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

6.3 Sommes de cosinus

La partie réelle de la somme géométrique complexe

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

donne des identités trigonométriques.

Si $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, alors

$$S = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}.$$

Une mise en facteur exponentielle conduit à

$$S = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x/2} \frac{\sin(nx/2)}{\sin(x/2)}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(kx) = \frac{\sin(nx/2)\cos((n-1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

Intérêt. Les nombres complexes fournissent une méthode systématique pour démontrer des identités trigonométriques et calculer certaines sommes.

7 Cinquième application : étude d'une configuration

7.1 Caractérisation d'un carré

Soient A, B, C et D quatre points d'affixes respectives a, b, c et d.

Supposons que

$$c - a = \mathrm{i}(b - a)$$

et

$$d - a = b - a + c - a.$$

La première égalité signifie que $\overrightarrow{AC}$ est l'image de $\overrightarrow{AB}$ par une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$: elle garantit que $AB = AC$ et que $AB \perp AC$.

La seconde égalité s'écrit

$$d = b + c - a.$$

Elle exprime que le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme, car ses diagonales ont le même milieu.

Ainsi, $ABDC$ est un carré.

Remarque 7.1. Il faut distinguer soigneusement l'ordre des sommets dans l'énoncé. La caractérisation usuelle d'un carré $ABCD$ peut s'exprimer en imposant que ses diagonales aient le même milieu et la même longueur, et qu'elles soient perpendiculaires.

7.2 Une méthode générale

Pour résoudre un problème de géométrie à l'aide des complexes, on peut suivre les étapes suivantes :

1. choisir un repère adapté et noter les affixes ;
2. traduire les hypothèses géométriques en relations complexes ;
3. simplifier les expressions algébriques ;
4. interpréter le résultat obtenu ;
5. vérifier que les conditions nécessaires, notamment les dénominateurs non nuls, sont satisfaites.

8 Ouvertures et limites

Les nombres complexes sont également utilisés dans :

— l'étude des polynômes et la factorisation ;

— les circuits électriques en régime sinusoïdal ;

— les signaux périodiques et leur représentation par des exponentielles complexes ;

— les transformations du plan et les fractales ;

— l'analyse de Fourier et les équations différentielles linéaires.

Dans un cadre scolaire, ces applications doivent être adaptées au niveau considéré. Les nombres complexes ne remplacent pas toutes les méthodes : le choix d'un outil dépend du problème et des connaissances disponibles.

9 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés dans l'ordre, du calcul algébrique vers les applications géométriques.

Exercice 1 – Équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

Vérifier que les deux solutions sont conjuguées.

Exercice 2 – Racines de l'unité

Déterminer les racines quatrièmes de l'unité. Les représenter dans le plan complexe et démontrer qu'elles sont les sommets d'un carré.

Exercice 3 – Distance et milieu

On considère les points d'affixes

$$a = 2 - \mathrm{i}, \qquad b = 4 + 3\mathrm{i}.$$

Calculer AB et déterminer l'affixe du milieu de $[AB]$.

Exercice 4 – Alignement

Soient les points d'affixes

$$a = 1 + 2\mathrm{i}, \qquad b = 3 + 5\mathrm{i}, \qquad c = 5 + 8\mathrm{i}.$$

Montrer que les points sont alignés en calculant

$$\frac{c - a}{b - a}.$$

Exercice 5 – Orthogonalité

On considère deux vecteurs d'affixes

$$u = 2 + \mathrm{i}, \qquad v = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Déterminer si ces vecteurs sont orthogonaux en calculant $\mathrm{Re}(u\overline{v})$.

Exercice 6 – Rotation

Dans le plan complexe, on considère la rotation de centre d'affixe $1+\mathrm{i}$ et d'angle $\pi/3$. Établir l'expression complexe de cette rotation, puis déterminer l'image du point d'affixe 2.

Exercice 7 – Similitude directe

Soit la transformation

$$z' = (2 + \mathrm{i})z - 3\mathrm{i}.$$

Déterminer son rapport et son angle. Préciser si elle est une rotation, une homothétie ou une similitude directe générale.

Exercice 8 – Identités trigonométriques

À l'aide de la formule de Moivre, démontrer

$$\cos(3x) = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

et

$$\sin(3x) = 3\sin x - 4\sin^3 x.$$

Exercice 9 – Triangle équilatéral

Soient A et B deux points distincts d'affixes a et b. On pose

$$c = a + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(b-a).$$

Montrer que le triangle ABC est équilatéral. Discuter le choix de l'angle $-\pi/3$.

Exercice 10 – Synthèse

Soient quatre points d'affixes a, b, c, d tels que

$$c - a = \mathrm{i}(b-a), \qquad d = b + c - a.$$

Déterminer la nature du quadrilatère $ABDC$, en justifiant précisément chaque propriété.

10 Éléments de correction

Correction de l'exercice 1

Le discriminant est

$$\Delta = 16 - 52 = -36.$$

Les solutions sont

$$z_1 = 2 + 3\mathrm{i}, \qquad z_2 = 2 - 3\mathrm{i}.$$

Correction de l'exercice 2

Les solutions de $z^4 = 1$ sont

$$1, \quad \mathrm{i}, \quad -1, \quad -\mathrm{i}.$$

Elles sont situées sur le cercle unité aux angles 0, $\pi/2$, π et $3\pi/2$: elles sont les sommets d'un carré.

Correction de l'exercice 3

On a

$$b - a = 2 + 4\mathrm{i}, \qquad AB = |2 + 4\mathrm{i}| = 2\sqrt{5}.$$

L'affixe du milieu est

$$z_I = \frac{a+b}{2} = 3 + \mathrm{i}.$$

Correction de l'exercice 4

On calcule

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{4+6\mathrm{i}}{2+3\mathrm{i}} = 2.$$

Ce quotient est réel : les trois points sont alignés.

Correction de l'exercice 5

On a

$$u\overline{v} = (2+\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 5\mathrm{i}.$$

Sa partie réelle est nulle. Les vecteurs sont donc orthogonaux.

Correction de l'exercice 6

L'expression de la rotation est

$$z' = 1 + \mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(z - 1 - \mathrm{i}).$$

Pour $z = 2$, on obtient

$$z' = 1 + \mathrm{i} + \frac{1 + \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}(1 - \mathrm{i}).$$

Après développement,

$$z' = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} + \mathrm{i}\frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Correction de l'exercice 7

Le coefficient multiplicateur est $2 + \mathrm{i}$. Le rapport vaut

$$|2 + \mathrm{i}| = \sqrt{5}$$

et un angle est

$$\theta = \arg(2 + \mathrm{i}) = \arctan(1/2).$$

Comme le rapport n'est pas égal à 1 et que l'angle n'est pas nul modulo 2π, il s'agit d'une similitude directe qui n'est ni une rotation ni une homothétie.

Correction de l'exercice 8

Par la formule de Moivre,

$$(\cos x + \mathrm{i}\sin x)^3 = \cos(3x) + \mathrm{i}\sin(3x).$$

Le développement du membre de gauche donne

$$\cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x + \mathrm{i}(3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x).$$

L'identification des parties réelle et imaginaire, avec $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ et $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, donne les deux identités.

Correction de l'exercice 9

On a

$$c - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}(b - a).$$

La multiplication par $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}$ conserve les modules et ajoute un angle de $\pi/3$. Ainsi,

$$AC = AB$$

et l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ vaut $\pi/3$. Le triangle ABC est équilatéral. Le choix de $-\pi/3$ donne l'autre sommet possible, de l'autre côté de la droite (AB).

Correction de l'exercice 10

La première relation donne

$$AC = AB, \qquad AB \perp AC.$$

La seconde donne

$$d = b + c - a,$$

donc

$$a + d = b + c.$$

Les diagonales $[AD]$ et $[BC]$ du quadrilatère $ABDC$ ont le même milieu. Ce quadrilatère est donc un parallélogramme. Comme deux côtés consécutifs sont égaux et perpendiculaires, c'est un carré.

11 Conclusion

Les exemples étudiés illustrent la polyvalence des nombres complexes. Ils permettent de résoudre des équations, de calculer des distances, de caractériser des configurations géométriques, d'étudier des transformations planes et de démontrer des identités trigonométriques.

Leur intérêt principal réside dans la possibilité de traduire un problème géométrique en calcul algébrique, puis de revenir à une interprétation géométrique. Cette démarche constitue un exemple important d'interaction entre plusieurs domaines des mathématiques.

À l'oral du CAPES, il est pertinent de ne pas se limiter à une succession de formules : il convient de justifier les résultats, de préciser les hypothèses et de mettre en évidence la situation dans laquelle chaque outil est le plus efficace.

Références

[1] Michèle Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, collection Grenoble Sciences.

[2] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Algèbre*, Ellipses.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[4] IREM, *Ressources pour l'enseignement des mathématiques*, publications et activités pédagogiques. https://www.univ-irem.fr/

[5] Collection Déclic, *Mathématiques, Terminale générale*, Hachette Éducation.