Lecon d'oral du CAPES de mathematiques

Algebre lineaire en section de technicien superieur

Table des matières

1 Introduction et positionnement **2**

2 Prerequis et objectifs **2**
- 2.1 Prerequis . . . 2
- 2.2 Objectifs . . . 2

3 Les systemes lineaires **2**
- 3.1 Mise en equation d'un probleme . . . 2
- 3.2 Ecriture matricielle . . . 3
- 3.3 Methode du pivot de Gauss . . . 3

4 Matrices et operations **4**
- 4.1 Definition . . . 4
- 4.2 Addition et multiplication par un scalaire . . . 4
- 4.3 Produit matriciel . . . 4
- 4.4 Matrice identite et matrice inverse . . . 4

5 Applications professionnelles **5**
- 5.1 Gestion des flux et production . . . 5
- 5.2 Reseaux electriques . . . 5
- 5.3 Chaine de Markov : evolution d'un stock de clients . . . 5

6 Outils numeriques et demarche pedagogique **6**
- 6.1 Utilisation d'un logiciel . . . 6
- 6.2 Proposition de deroulement . . . 7

7 Exercices **7**

8 Elements de correction **8**

9 Bilan et ouverture **9**

10 References bibliographiques et institutionnelles **10**

1 Introduction et positionnement

L'algebre lineaire etudie les relations lineaires entre des grandeurs, les systemes d'equations lineaires et les transformations representees par des matrices. En section de technicien superieur (STS), elle prend une place particuliere en raison de ses nombreuses applications en sciences industrielles, en informatique, en gestion, en electronique et dans les sciences physiques.

Les matrices permettent notamment de modeliser des flux, de resoudre des systemes d'equations, d'etudier des evolutions discretes et d'effectuer des calculs repetitifs de maniere systematique. L'objectif n'est donc pas uniquement de manipuler des objets abstraits : il s'agit aussi de choisir un modele pertinent, d'effectuer les calculs necessaires et d'interpreter les resultats dans leur contexte.

Les contenus effectivement enseignes dependent de la specialite de BTS et de son referentiel. La presente lecon propose un cadre transversal, a adapter au programme officiel de la specialite retenue.

2 Prerequis et objectifs

2.1 Prerequis

Les etudiants doivent maitriser :

— le calcul algebrique et la resolution d'equations ;

— les systemes de deux ou trois equations lineaires ;

— les operations sur les nombres reels ;

— la lecture de tableaux de donnees ;

— les fonctions usuelles et les suites numeriques ;

— l'utilisation elementaire d'une calculatrice ou d'un logiciel de calcul.

Selon la specialite, des connaissances en probabilites, en mecanique, en electricite ou en economie peuvent constituer des points d'appui pour les applications.

2.2 Objectifs

A l'issue de la sequence, l'etudiant doit pouvoir :

— representer des donnees et des relations lineaires au moyen de matrices ;

— effectuer des additions, multiplications et produits matriciels lorsque ceux-ci sont definis ;

— traduire un probleme concret en systeme lineaire ;

— resoudre un systeme par elimination de Gauss ou, dans les cas adaptes, par une methode matricielle ;

— interpreter la solution et verifier sa coherence ;

— mobiliser un outil numerique pour controler les calculs et traiter des exemples de taille plus importante ;

— distinguer une methode de calcul d'une justification mathematique.

3 Les systemes lineaires

3.1 Mise en equation d'un probleme

Considerons une entreprise qui fabrique deux produits, de types A et B. Chaque produit consomme des ressources selon les donnees suivantes :

	Produit A	Produit B
Ressource 1	2	1
Ressource 2	1	3

On dispose de 100 unites de la premiere ressource et de 90 unites de la seconde. Si x et y designent les quantites produites, on obtient le systeme

$$\begin{cases} 2x + y = 100, \\ x + 3y = 90. \end{cases}$$

La resolution donne

$$y = 100 - 2x,$$

puis

$$x + 3(100 - 2x) = 90,$$

soit $-5x = -210$, donc

$$x = 42, \qquad y = 16.$$

La solution doit ensuite etre interpretee : elle correspond a une production de 42 unites de A et de 16 unites de B, sous reserve que les hypotheses du modele soient satisfaites.

3.2 Ecriture matricielle

Le systeme precedent s'ecrit

$$AX = B,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \end{pmatrix}.$$

Plus generalement, un systeme de m equations lineaires a n inconnues s'ecrit

$$AX = B,$$

ou $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$.

Cette ecriture met en evidence la structure du probleme et facilite son traitement numerique.

3.3 Methode du pivot de Gauss

La methode du pivot de Gauss consiste a transformer le systeme en un systeme equivalent, plus simple, par :

— permutation de deux lignes ;

— multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;

— ajout a une ligne d'un multiple d'une autre ligne.

Ces operations correspondent a des transformations elementaires des lignes de la matrice augmentee

$$(A \mid B).$$

Elles permettent d'obtenir une forme echelonnee, puis de determiner les solutions par remontee.

La methode s'applique aussi bien aux systemes carres qu'aux systemes comportant davantage d'equations que d'inconnues ou inversement.

Remarque 3.1. Un systeme lineaire peut n'avoir aucune solution, avoir une unique solution ou avoir une infinite de solutions. Le nombre d'equations ne suffit pas, a lui seul, a determiner le nombre de solutions.

4 Matrices et operations

4.1 Definition

Definition 4.1. Une matrice reelle a m lignes et n colonnes est un tableau de nombres reels note

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}.$$

L'ensemble de ces matrices est note $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$.

Les matrices peuvent representer des coefficients de production, des mesures, des transformations de vecteurs ou des probabilites de transition.

4.2 Addition et multiplication par un scalaire

Si A et B sont de meme dimension, alors

$$(A+B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda A)_{ij} = \lambda a_{ij}.$$

Ces operations permettent notamment d'additionner des tableaux de memes dimensions ou de modifier l'echelle des donnees.

4.3 Produit matriciel

Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Le produit AB est defini et appartient a $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$. Ses coefficients sont donnes par

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}.$$

Le nombre de colonnes de A doit donc etre egal au nombre de lignes de B.
En general,

$$AB \neq BA.$$

Le produit matriciel traduit la composition de deux transformations lineaires et permet d'enchainer plusieurs etapes d'un modele.

4.4 Matrice identite et matrice inverse

La matrice identite d'ordre n est

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Elle verifie $AI_n = I_m A = A$ lorsque les produits sont definis.
Une matrice carree A est inversible s'il existe une matrice A^{-1} telle que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Dans ce cas, le systeme $AX = B$ admet une unique solution pour tout second membre B, donnee par

$$X = A^{-1}B.$$

En dimension deux, pour

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on a

$$\det(A) = ad - bc.$$

La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et alors

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Cette formule est utile en petite dimension, mais le pivot de Gauss est souvent plus general et plus adapte au calcul numerique.

5 Applications professionnelles

5.1 Gestion des flux et production

Dans une entreprise, les consommations de ressources peuvent etre representees par une matrice A. Si le vecteur X contient les quantites produites, le vecteur $B = AX$ donne les consommations totales.

Le modele permet de determiner les quantites necessaires, de verifier les contraintes de production ou d'etudier l'effet d'une modification des quantites fabriquees.

Il faut cependant distinguer les egalites de bilan des contraintes d'inegalite. Par exemple, des stocks limites peuvent conduire a des conditions du type

$$AX \leq B, \qquad X \geq 0.$$

Ce type de probleme releve alors notamment de la programmation lineaire.

5.2 Reseaux electriques

Dans un circuit electrique, les lois des noeuds et des mailles conduisent a des equations lineaires portant sur les intensites et les tensions.

Apres choix des inconnues, on peut obtenir un systeme

$$AX = B.$$

La matrice depend de la topologie du circuit et des parametres physiques. La resolution donne les grandeurs electriques recherchees, sous les hypotheses du modele.

Cette application permet de relier l'algebre lineaire aux enseignements scientifiques et techniques de plusieurs specialites de BTS.

5.3 Chaine de Markov : evolution d'un stock de clients

On considere deux categories de clients, notes A et B. D'une periode a la suivante :

— 80 % des clients de categorie A restent en A ;

— 20 % passent de A a B ;

— 30 % des clients de categorie B passent en A ;

— 70 % restent en B.

On adopte la convention des vecteurs colonnes. La matrice de transition est

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

Si

$$X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

represente les proportions de clients a la periode n, alors

$$X_{n+1} = PX_n.$$

Par recurrence,

$$X_n = P^n X_0.$$

Chaque colonne de P a une somme egale a 1 et ses coefficients sont positifs : la matrice respecte ainsi la conservation de la proportion totale.

A titre d'exemple, pour

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix},$$

on obtient

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.60 \\ 0.40 \end{pmatrix}.$$

Cette distribution est stationnaire. Plus generalement, une distribution stationnaire est un vecteur X tel que

$$PX = X, \qquad x_1 + x_2 = 1, \qquad x_1, x_2 \geq 0.$$

Dans cet exemple, la resolution conduit a

$$X = \begin{pmatrix} 0.6 \\ 0.4 \end{pmatrix}.$$

La modelisation par chaine de Markov permet d'etudier l'evolution de clienteles, de stocks ou de systemes a etats discrets. Son emploi depend toutefois des competences inscrites au programme de la specialite.

6 Outils numeriques et demarche pedagogique

6.1 Utilisation d'un logiciel

Une calculatrice, un tableur ou un logiciel de calcul formel peut etre utilise pour :

— verifier un produit matriciel ;

— resoudre un systeme de grande taille ;

— calculer des puissances de matrices ;

— comparer plusieurs methodes de resolution ;

— simuler l'evolution d'un modele discret.

L'outil numerique ne dispense pas de verifier les dimensions des matrices, les hypotheses du modele et la plausibilite des resultats.

6.2 Proposition de deroulement

Une sequence peut etre organisee en quatre temps :

1. **Situation professionnelle :** identifier les inconnues et les contraintes.
2. **Mathematisation :** construire un systeme lineaire ou une matrice.
3. **Resolution :** effectuer les calculs a la main sur un exemple simple, puis utiliser un outil numerique si necessaire.
4. **Interpretation :** controler le resultat, discuter les limites du modele et communiquer une conclusion contextualisee.

L'evaluation doit porter a la fois sur les calculs, la capacite a traduire une situation en langage mathematique et l'interpretation des resultats.

7 Exercices

Exercice 1 (Systeme de production)**.** Une entreprise fabrique deux produits A et B. Le produit A necessite deux heures de travail et une unite de matiere premiere. Le produit B necessite une heure de travail et trois unites de matiere premiere. La production utilise au total 100 heures et 90 unites de matiere premiere.

a) Definir les inconnues et construire le systeme.

b) Resoudre le systeme.

c) Interpreter les valeurs obtenues.

d) Expliquer pourquoi les contraintes de disponibilite ne suffisent pas toujours a decrire un probleme reel de production.

Exercice 2 (Operations matricielles)**.** On donne

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer $A + B$ et $2A - B$.

b) Calculer AB puis BA.

c) Comparer les deux produits.

d) Calculer le determinant de A et determiner son inverse.

Exercice 3 (Resolution par pivot de Gauss)**.** Resoudre le systeme suivant en detaillant les operations elementaires effectuees sur les lignes :

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ 2x - y + 3z = 9, \\ 3x + y + 2z = 10. \end{cases}$$

Verifier ensuite la solution par substitution.

Exercice 4 (Analyse d'un systeme parametre)**.** On considere le systeme

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 2y = \lambda. \end{cases}$$

a) Pour quelles valeurs de λ le systeme est-il compatible ?

b) Determiner l'ensemble des solutions dans chaque cas.

c) Interpreter le resultat a l'aide des deux equations.

Exercice 5 (Modele de flux)**.** Une entreprise dispose de trois ateliers. Les quantites de pieces envoyees de chaque atelier vers trois postes de montage sont representees par

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 \\ 4 & 8 & 6 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

a) Interpreter les lignes et les colonnes selon une convention explicite.

b) Calculer les totaux par ligne et par colonne.

c) Expliquer comment une matrice de couts permettrait de calculer le cout total du transfert.

d) Proposer une methode de verification des calculs.

Exercice 6 (Chaine de Markov)**.** On reprend la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0.2 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

A la periode initiale, les proportions sont

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.6 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer X_1 et X_2.

b) Verifier que la somme des composantes reste egale a 1.

c) Determiner la distribution stationnaire.

d) Comparer les resultats obtenus apres plusieurs iterations et discuter la stabilisation observee.

Exercice 7 (Application numerique)**.** On considere un systeme $AX = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Resoudre le systeme par elimination.

b) Verifier le resultat par multiplication matricielle.

c) Utiliser un tableur ou un logiciel pour controler les calculs.

d) Expliquer pourquoi il est important de conserver une interpretation des inconnues.

8 Elements de correction

Exercice 1

Le systeme est

$$\begin{cases} 2x + y = 100, \\ x + 3y = 90. \end{cases}$$

Sa solution est $x = 42$ et $y = 16$.

Exercice 2

On obtient

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}, \qquad 2A-B=\begin{pmatrix}0 & 4\\ 5 & 9\end{pmatrix}.$$

De plus,

$$AB=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}, \qquad BA=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

Les produits sont differents. Enfin,

$$\det(A)=-2, \qquad A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Exercice 3

La solution est

$$(x,y,z)=(2,1,3).$$

La verification se fait en remplacant les inconnues dans les trois equations.

Exercice 4

Si $\lambda=4$, les deux equations sont compatibles et les solutions verifient $x+y=2$. Si $\lambda\neq 4$, le systeme est incompatible.

Exercice 5

Les totaux par ligne sont respectivement 15, 18 et 14. Les totaux par colonne sont 16, 13 et 18. L'interpretation depend de la convention retenue pour les lignes et les colonnes.

Exercice 6

On obtient

$$X_1=\begin{pmatrix}0.50\\ 0.50\end{pmatrix}, \qquad X_2=\begin{pmatrix}0.55\\ 0.45\end{pmatrix}.$$

La distribution stationnaire est

$$X=\begin{pmatrix}0.6\\ 0.4\end{pmatrix}.$$

Exercice 7

La solution est

$$(x,y,z)=\left(\frac{11}{7},\frac{17}{7},\frac{19}{7}\right).$$

La substitution dans les trois equations permet de verifier le resultat.

9 Bilan et ouverture

L'algebre lineaire fournit des outils efficaces pour modeliser et resoudre de nombreux problemes rencontres dans les sections de technicien superieur. Les systemes lineaires permettent de traduire des bilans et des contraintes, tandis que les matrices facilitent le traitement organise des donnees et la representation de transformations ou d'evolutions discretes.

Dans une demarche d'enseignement, il convient de partir d'une situation professionnelle, de faire construire le modele par les etudiants, puis de confronter les resultats mathematiques a la situation initiale. Le recours au numerique complete les methodes de calcul sans remplacer le raisonnement.

Une ouverture possible consiste a etudier les problemes de moindres carres, la programmation lineaire ou les systemes dynamiques discrets, selon le niveau et la specialite de BTS.

10 References bibliographiques et institutionnelles

1. Ministere de l'Enseignement superieur et de la Recherche, *Referentiels et programmes des sections de techniciens superieurs*. Les textes applicables doivent etre recherches pour la specialite concernee sur le Bulletin officiel de l'education nationale : https://www.education.gouv.fr/bo.
2. Ministere de l'Education nationale, *Ressources d'accompagnement en mathematiques pour les sections de techniciens superieurs*. Portail Eduscol : https://eduscol.education.fr/.
3. Lay, D. C., Lay, S. R. et McDonald, J. J., *Linear Algebra and Its Applications*, Pearson. Ouvrage de reference pour les matrices, les systemes lineaires et les applications.
4. Strang, G., *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press. Ouvrage consacre aux systemes lineaires, aux matrices et aux applications de l'algebre lineaire.
5. Trotignon, J.-Y., ouvrages et ressources de mathematiques destines aux sections de techniciens superieurs, a choisir selon la specialite et le programme en vigueur.

Remarque 10.1. Les references institutionnelles doivent etre consultees pour verifier les contenus effectivement exigibles dans la specialite de BTS choisie. Les ouvrages generaux d'algebre lineaire constituent des complements scientifiques et ne definissent pas, a eux seuls, les attendus du programme.