Proportionnalité et linéarité

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

Introduction **1**

1 Prérequis et objectifs **1**
- 1.1 Prérequis . . . 1
- 1.2 Objectifs . . . 1

2 La proportionnalité **2**
- 2.1 Définition et caractérisations . . . 2
- 2.2 Tableaux de proportionnalité . . . 2
- 2.3 Représentation graphique . . . 2

3 Fonctions linéaires **3**
- 3.1 Définition . . . 3
- 3.2 Propriétés algébriques . . . 3
- 3.3 Coefficient directeur et variations . . . 3
- 3.4 Somme et composition . . . 4

4 Fonction linéaire et fonction affine **4**
- 4.1 Définition d'une fonction affine . . . 4
- 4.2 Exemples de modélisation . . . 4

5 Applications linéaires : généralisation **4**
- 5.1 Définition . . . 4
- 5.2 Exemples . . . 5
- 5.3 Matrices et linéarité . . . 5

6 Intérêt didactique et difficultés fréquentes **5**
- 6.1 Différents registres de représentation . . . 5
- 6.2 Erreurs fréquentes . . . 5
- 6.3 Pistes pédagogiques . . . 6

7 Exercices proposés **6**

8 Références bibliographiques et institutionnelles **8**

Conclusion **8**

Introduction

La proportionnalité est une notion fondamentale des mathématiques, présente aussi bien dans les situations de la vie courante que dans les sciences et les enseignements technologiques. Elle permet de modéliser des relations dans lesquelles deux grandeurs varient dans une même proportion. Elle intervient notamment dans les calculs de prix, les conversions d'unités, les échelles, les pourcentages et les problèmes de vitesse.

La linéarité constitue une généralisation algébrique de cette idée. Une fonction linéaire est de la forme $x \mapsto ax$ et traduit une relation de proportionnalité entre la variable et son image. En algèbre linéaire, la notion de linéarité s'étend aux applications entre espaces vectoriels, caractérisées par la compatibilité avec l'addition et la multiplication par un scalaire.

L'objectif de cette leçon est de montrer comment une notion élémentaire, la proportionnalité, conduit à la définition des fonctions linéaires, puis à la notion plus générale d'application linéaire.

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Les connaissances nécessaires sont :

— les opérations sur les nombres rationnels et réels ;

— les fractions, les rapports et les quotients ;

— les grandeurs et les changements d'unités ;

— les pourcentages et les échelles ;

— la résolution d'équations du premier degré ;

— la lecture et la représentation graphique de fonctions ;

— les notions de vecteur, de combinaison linéaire et d'espace vectoriel pour l'extension à l'algèbre linéaire.

1.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :

— reconnaître et caractériser une situation de proportionnalité ;

— utiliser un coefficient de proportionnalité ;

— distinguer une relation proportionnelle d'une relation affine ;

— définir et étudier une fonction linéaire ;

— interpréter graphiquement une situation de proportionnalité ;

— mobiliser la linéarité pour résoudre des problèmes ;

— généraliser ces propriétés aux applications linéaires entre espaces vectoriels.

2 La proportionnalité

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2.1. *Deux grandeurs x et y sont proportionnelles lorsque, dans le domaine considéré, il existe une constante a telle que*

$$y = ax.$$

Le nombre a est appelé coefficient de proportionnalité.

Lorsque les valeurs de x et de y sont organisées dans un tableau, la proportionnalité signifie que les valeurs d'une ligne s'obtiennent en multipliant celles de l'autre ligne par une constante commune.

Propriété 2.2. *Si $y = ax$, alors :*

- *le quotient y/x est constant lorsque $x \neq 0$;*
- *multiplier x par un nombre multiplie y par ce même nombre ;*
- *les sommes sont compatibles avec la relation : si $y_1 = ax_1$ et $y_2 = ax_2$, alors $y_1 + y_2 = a(x_1 + x_2)$.*

Remarque 2.3. *La caractérisation par un quotient constant nécessite de traiter séparément le cas $x = 0$. Dans une relation de proportionnalité, $x = 0$ entraîne $y = 0$.*

2.2 Tableaux de proportionnalité

Un tableau de proportionnalité peut s'écrire

x	x_1	x_2	x_3
y	ax_1	ax_2	ax_3

Les propriétés du tableau découlent de la multiplication par le même coefficient. On peut utiliser :

- le passage à l'unité ;
- la multiplication ou la division d'une colonne ;
- l'addition de colonnes ;
- le produit en croix, lorsque les dénominateurs sont non nuls.

Exemple 2.4. *Si 4 kg de pommes coûtent 10 euros, le prix de 7 kg est*

$$7 \times \frac{10}{4} = 17{,}50 \text{ euros.}$$

Le coefficient de proportionnalité, exprimé en euros par kilogramme, est 2,50.

2.3 Représentation graphique

Dans un repère, les points de coordonnées (x, ax) appartiennent à la droite d'équation

$$y = ax.$$

Cette droite passe par l'origine. Réciproquement, toute droite d'équation $y = ax$ représente une relation de proportionnalité.

Remarque 2.5. *La représentation graphique d'une relation affine $y = ax + b$ est également une droite, mais elle ne représente une proportionnalité que lorsque $b = 0$.*

3 Fonctions linéaires

3.1 Définition

Définition 3.1. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire s'il existe un réel a tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$f(x) = ax.$$

Le réel a est appelé coefficient de linéarité.

Une fonction linéaire est donc une fonction qui modélise une situation de proportionnalité entre x et $f(x)$.

Exemple 3.2. *La fonction $f(x) = 3x$ est linéaire, de coefficient 3. En revanche, la fonction $g(x) = 3x + 2$ n'est pas linéaire : elle est affine et sa représentation graphique ne passe pas par l'origine.*

3.2 Propriétés algébriques

Propriété 3.3. *Si $f(x) = ax$, alors, pour tous réels x, y et tout réel λ,*

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

et

$$f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

En particulier,

$$f(0) = 0, \qquad f(-x) = -f(x).$$

Théorème 3.4. *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement si elle vérifie*

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

pour tous $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Si $f(x) = ax$, les deux égalités se vérifient directement.

Réciproquement, supposons que f vérifie ces propriétés. En prenant $a = f(1)$, on obtient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = f(x \cdot 1) = xf(1) = ax.$$

La fonction est donc linéaire. □

3.3 Coefficient directeur et variations

La représentation graphique de $f(x) = ax$ est une droite passant par l'origine, de coefficient directeur a.

— Si $a > 0$, la fonction est strictement croissante.

— Si $a < 0$, la fonction est strictement décroissante.

— Si $a = 0$, la fonction est constante et nulle.

Le coefficient a peut se déterminer à partir d'une valeur non nulle de x :

$$a = \frac{f(x)}{x}, \qquad x \neq 0.$$

3.4 Somme et composition

Si $f(x) = ax$ et $g(x) = bx$, alors :

$$(f+g)(x) = (a+b)x.$$

La somme de deux fonctions linéaires est donc linéaire.

De même,

$$(f \circ g)(x) = a(bx) = abx.$$

La composée de deux fonctions linéaires est également linéaire.

4 Fonction linéaire et fonction affine

4.1 Définition d'une fonction affine

Une fonction affine est une fonction de la forme

$$f(x) = ax + b,$$

où a et b sont des réels.

Le coefficient a est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.

Une fonction affine est linéaire si et seulement si $b = 0$. La distinction est essentielle pour éviter de confondre une droite quelconque et une droite passant par l'origine.

4.2 Exemples de modélisation

— **Prix proportionnel à une quantité :** $P(q) = pq$, si le prix unitaire p est constant et qu'il n'existe pas de frais fixes.

— **Tarif avec frais fixes :** $C(q) = pq + b$, où b représente un coût indépendant de la quantité. La fonction est affine, mais non linéaire si $b \neq 0$.

— **Conversion d'unités :** une conversion entre unités de même nature est souvent décrite par une fonction linéaire, par exemple $m_{\mathrm{g}} = 1000 m_{\mathrm{kg}}$.

— **Températures :** la conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit s'écrit

$$F(C) = \frac{9}{5}C + 32.$$

Cette fonction est affine, mais non linéaire.

5 Applications linéaires : généralisation

5.1 Définition

La linéarité ne se limite pas aux fonctions d'une variable réelle. Elle s'étend aux applications entre espaces vectoriels.

Définition 5.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur un même corps $\mathbb{K}$. Une application $u : E \to F$ est linéaire si, pour tous $x, y \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,*

$$u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y).$$

Cette définition équivaut aux deux conditions :

$$u(x + y) = u(x) + u(y), \qquad u(\lambda x) = \lambda u(x).$$

Elle implique notamment

$$u(0_E) = 0_F.$$

5.2 Exemples

1. L'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

   $$u(x, y) = 2x - 3y$$

   est linéaire.
2. L'application $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

   $$v(x, y) = (x + y, 2x - y)$$

   est linéaire.
3. L'application $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

   $$w(x, y) = (x + 1, y)$$

   n'est pas linéaire, car $w(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

5.3 Matrices et linéarité

Dans les espaces vectoriels de dimension finie, une application linéaire peut être représentée par une matrice.

Par exemple, si

$$u(x, y) = (2x + y, 3x - y),$$

alors

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La multiplication matricielle respecte les combinaisons linéaires. Elle fournit ainsi un outil de calcul et de modélisation dans de nombreuses applications scientifiques et technologiques.

6 Intérêt didactique et difficultés fréquentes

6.1 Différents registres de représentation

L'enseignement de la proportionnalité et de la linéarité permet d'articuler plusieurs registres :

— le registre numérique : tableaux, rapports, calculs ;

— le registre algébrique : expressions ax et $ax + b$;

— le registre graphique : droites passant ou non par l'origine ;

— le registre verbal : interprétation d'une situation concrète.

Le passage d'un registre à l'autre est un objectif important. Une formule doit pouvoir être interprétée dans son contexte, et un graphique doit être relié à une expression algébrique.

6.2 Erreurs fréquentes

— Confondre toute relation croissante avec une proportionnalité.

— Croire que toute droite représente une fonction linéaire.

— Appliquer un coefficient de proportionnalité à une situation comportant des frais fixes.

— Utiliser le produit en croix sans vérifier la nature de la relation.

— Confondre la linéarité d'une application avec le simple fait qu'elle soit représentée par une droite.

6.3 Pistes pédagogiques

Une progression possible part de situations concrètes, comme un achat à prix unitaire constant, puis conduit à la construction d'un tableau, à l'écriture d'une formule et à sa représentation graphique.

On peut ensuite comparer ces situations à des modèles affines comportant une valeur initiale non nulle. Cette comparaison permet de faire émerger le rôle de l'origine et de distinguer les deux notions.

Enfin, dans un enseignement plus avancé, les propriétés de l'addition et de la multiplication par un scalaire conduisent naturellement à la définition des applications linéaires.

7 Exercices proposés

Les exercices suivants peuvent être utilisés pour illustrer la progression de la leçon. Les indications fournies permettent de faire apparaître les notions essentielles sans remplacer le travail de résolution.

Exercice 1 – Reconnaître une proportionnalité

On considère le tableau suivant :

x	2	5	8	12
y	6	15	24	36

1. Déterminer si les grandeurs sont proportionnelles.
2. Calculer le coefficient de proportionnalité.
3. Donner une expression de y en fonction de x.

Indication : comparer les quotients y/x.

Exercice 2 – Une situation non proportionnelle

Un taxi facture une prise en charge de 4 euros, puis 2 euros par kilomètre parcouru.

1. Exprimer le prix $P(d)$ en fonction de la distance d.
2. La fonction obtenue est-elle linéaire ?
3. Interpréter graphiquement les paramètres de cette fonction.
4. Comparer avec un tarif de 2,50 euros par kilomètre sans frais fixes.

Indication : distinguer la valeur initiale du coût variable.

Exercice 3 – Étude d'une fonction linéaire

Soit $f(x) = -3x$.

1. Déterminer $f(-2)$, $f(0)$ et $f(4)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Construire sa représentation graphique.
4. Résoudre l'équation $f(x) = 12$.

Exercice 4 – Déterminer un coefficient

Une fonction linéaire f vérifie $f(5) = 12$.

1. Déterminer son coefficient de linéarité.
2. Donner l'expression de $f(x)$.
3. Calculer $f(-10)$.
4. Déterminer l'antécédent de -6.

Exercice 5 – Conversion d'unités

La masse m est exprimée en kilogrammes et la masse M en grammes.

1. Exprimer M en fonction de m.
2. Montrer qu'il s'agit d'une relation de proportionnalité.
3. Représenter graphiquement la fonction correspondante.
4. Expliquer le rôle des unités dans le coefficient.

Exercice 6 – Pourcentages successifs

Un article coûte initialement 80 euros. Son prix augmente de 10 %, puis diminue de 10 %.

1. Calculer le prix après chaque évolution.
2. Ces deux transformations se compensent-elles ?
3. Exprimer chaque transformation par une fonction linéaire.
4. Déterminer la fonction composée.

Indication : une hausse de 10 % correspond à une multiplication par 1,1 et une baisse de 10 % à une multiplication par 0,9.

Exercice 7 – Propriété additive

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = ax$.

1. Vérifier que $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
2. Vérifier que $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.
3. Donner un exemple de fonction affine qui ne vérifie pas la première égalité.

Exercice 8 – Application linéaire

On considère l'application

$$u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad u(x, y) = (2x - y, x + 3y).$$

1. Vérifier que u est linéaire.
2. Déterminer sa matrice dans la base canonique.
3. Calculer $u(1, 2)$ et $u(2, -1)$.
4. Vérifier la relation $u(2(1, 2) - 3(2, -1)) = 2u(1, 2) - 3u(2, -1)$.

Exercice 9 – Linéarité et contre-exemple

On considère $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x^2$.

1. Vérifier que $g(1 + 1) \neq g(1) + g(1)$.
2. En déduire que g n'est pas linéaire.
3. Comparer les représentations graphiques de g et de $f(x) = 2x$.

Exercice 10 – Synthèse

Une entreprise propose deux tarifs pour une prestation :

$$A(x) = 15x, \qquad B(x) = 10x + 40,$$

où x désigne le nombre d'unités commandées.

1. Identifier la fonction linéaire et la fonction affine.
2. Déterminer à partir de quelle quantité le tarif A est moins élevé que le tarif B.
3. Interpréter graphiquement le résultat.
4. Expliquer pourquoi le tarif comportant un coût fixe n'est pas proportionnel à la quantité.

8 Références bibliographiques et institutionnelles

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du cycle 4*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter la version en vigueur sur : https://www.education.gouv.fr/.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme de mathématiques de la classe de seconde générale et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter la version en vigueur sur : https://www.education.gouv.fr/.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Éduscol – Ressources d'accompagnement pour les mathématiques*. https://eduscol.education.fr/.

[4] M. Artin, *Algebra*, Pearson, 2e édition, 2011. Référence pour les notions d'algèbre et les structures linéaires.

[5] S. Lang, *Linear Algebra*, Springer, 3e édition, 1987. Référence pour les espaces vectoriels et les applications linéaires.

[6] G. Strang, *Introduction to Linear Algebra*, Wellesley-Cambridge Press, 6e édition, 2023. Référence pour les applications linéaires, les matrices et leurs interprétations.

Conclusion

La proportionnalité constitue une première approche concrète de la linéarité. Elle relie deux grandeurs par un coefficient constant et se traduit graphiquement par une droite passant par l'origine. La fonction linéaire formalise cette relation dans le cadre des fonctions numériques, tandis que l'application linéaire généralise les mêmes principes aux espaces vectoriels.

La distinction entre fonction linéaire et fonction affine est essentielle, notamment dans les situations de modélisation comportant une valeur initiale ou des frais fixes. L'étude conjointe des tableaux, des formules, des graphiques et des propriétés algébriques permet de donner du sens à ces notions et de préparer leur réinvestissement dans les sciences et l'algèbre linéaire.