Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Pourcentages

Table des matières

1 Introduction et enjeux **2**

2 Prérequis et objectifs **2**

2.1 Prérequis . . . 2

2.2 Objectifs . . . 2

3 Définition et premières propriétés **2**

3.1 Les trois problèmes fondamentaux . . . 3

4 Pourcentages et proportionnalité **4**

5 Évolutions en pourcentage **4**

5.1 Taux d'évolution . . . 4

5.2 Coefficient multiplicateur . . . 4

5.3 Évolutions successives . . . 5

5.4 Évolution réciproque . . . 5

6 Points de pourcentage et variation relative **6**

7 Pourcentages et statistiques **6**

7.1 Pourcentage global de plusieurs groupes . . . 6

8 Applications pédagogiques **7**

8.1 Progression possible . . . 7

8.2 Erreurs fréquentes . . . 7

8.3 Évaluation . . . 7

9 Liste d'exercices **7**

10 Indications de correction **9**

11 Conclusion **9**

12 Références bibliographiques et institutionnelles **9**

1 Introduction et enjeux

Les pourcentages sont omniprésents dans la vie courante : évolutions de prix, taux d'intérêt, résultats électoraux, statistiques démographiques, probabilités et indicateurs économiques. Ils permettent d'exprimer une proportion par rapport à une référence de 100.

Sur le plan mathématique, ils mobilisent les notions de proportionnalité, de fraction, de quotient, de coefficient multiplicateur et d'évolution relative. Leur étude constitue également une occasion de travailler le calcul numérique, le raisonnement algébrique et l'interprétation critique de données chiffrées.

La difficulté essentielle ne réside pas uniquement dans le calcul d'un pourcentage : elle consiste à identifier correctement la quantité de référence et à distinguer une proportion d'une variation relative.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les élèves doivent maîtriser :

- les fractions et les nombres décimaux ;
- les opérations sur les nombres rationnels ;
- la notion de quotient et de rapport ;
- les tableaux de proportionnalité ;
- la résolution d'une équation simple ;
- la lecture de tableaux et de graphiques.

2.2 Objectifs

À l'issue de l'étude, les élèves doivent être capables :

- d'interpréter un pourcentage comme une proportion rapportée à 100 ;
- de calculer une partie connaissant le tout et le taux ;
- de déterminer un taux connaissant la partie et le tout ;
- de retrouver une quantité totale à partir d'une partie et de son pourcentage ;
- de modéliser une hausse ou une baisse par un coefficient multiplicateur ;
- de calculer des évolutions successives et de déterminer un taux d'évolution global ;
- de distinguer points de pourcentage et variation relative ;
- de vérifier la cohérence d'un résultat et d'interpréter des données statistiques.

3 Définition et premières propriétés

Définition 1. *Soient $N > 0$ une quantité de référence et A une partie de cette quantité. Le pourcentage de A par rapport à N est le nombre*

$$p = \frac{A}{N} \times 100.$$

On dit alors que A représente $p\,\%$ de N.

Le symbole % signifie « pour cent ». Ainsi,

$$p\,\% = \frac{p}{100}.$$

Exemple 1. *Dans une classe de* 30 *élèves,* 18 *sont demi-pensionnaires. La proportion de demi-pensionnaires est*

$$\frac{18}{30} = 0{,}6,$$

soit

$$0{,}6 \times 100 = 60\,\%.$$

Propriété 1. *Prendre* $p\,\%$ *d'une quantité* N *revient à multiplier* N *par* $\frac{p}{100}$ *:*

$$A = \frac{p}{100}N.$$

Démonstration. Par définition, $p\,\%$ correspond à la fraction $\frac{p}{100}$. La quantité recherchée est donc

$$A = \frac{p}{100}N.$$

□

Exemple 2. *Calculons* $15\,\%$ *de* 240 *:*

$$\frac{15}{100} \times 240 = 36.$$

Ainsi, $15\,\%$ *de* 240 *vaut* 36.

3.1 Les trois problèmes fondamentaux

1. Calculer une partie.

Si N est le total et p le taux, alors

$$A = \frac{p}{100}N.$$

2. Calculer un taux.

Si A est la partie et N le total, alors

$$p = \frac{A}{N} \times 100.$$

3. Retrouver le total.

Si A représente $p\,\%$ de N, avec $p \neq 0$, alors

$$N = \frac{100A}{p}.$$

Exemple 3. *Après une remise, un article coûte* 68 *euros. Ce prix correspond à* $85\,\%$ *du prix initial. Le prix initial était donc*

$$\frac{68}{0{,}85} = 80 \text{ euros.}$$

4 Pourcentages et proportionnalité

Un pourcentage traduit une situation de proportionnalité lorsque le taux reste constant.

Si A représente $p\,\%$ de N, alors

$$A = kN, \qquad k = \frac{p}{100}.$$

Le coefficient de proportionnalité est donc $\dfrac{p}{100}$.

Exemple 4. *Le prix de 4 kilogrammes de pommes est de 10 euros. À prix unitaire constant, le prix de 7 kilogrammes est*

$$10 \times \frac{7}{4} = 17{,}50 \text{ euros.}$$

Le prix est proportionnel à la masse.

En revanche, si un tarif comprend un forfait fixe auquel s'ajoute un prix par kilogramme, le prix total n'est généralement pas proportionnel à la masse.

Remarque 1. *Un pourcentage n'est interprétable qu'en précisant sa référence. Dire qu'une valeur représente 20 % sans indiquer de quelle quantité il s'agit ne suffit pas à déterminer la quantité correspondante.*

5 Évolutions en pourcentage

5.1 Taux d'évolution

Définition 2. *Soient V_i une valeur initiale et V_f une valeur finale, avec $V_i \neq 0$. Le taux d'évolution de V_i à V_f est*

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i}.$$

Le taux exprimé en pourcentage est $100t\,\%$.

Si $t > 0$, il s'agit d'une hausse ; si $t < 0$, il s'agit d'une baisse.

Exemple 5. *Un prix passe de 80 euros à 92 euros. Le taux d'évolution est*

$$t = \frac{92 - 80}{80} = \frac{12}{80} = 0{,}15.$$

Le prix a augmenté de 15 %.

5.2 Coefficient multiplicateur

Propriété 2. *Pour une évolution de taux décimal t, le coefficient multiplicateur est*

$$CM = 1 + t.$$

La valeur finale est donnée par

$$V_f = V_i(1 + t).$$

Démonstration. Par définition,

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} = \frac{V_f}{V_i} - 1.$$

On en déduit

$$\frac{V_f}{V_i} = 1 + t,$$

puis $V_f = V_i(1+t)$. □

Une hausse de $p\,\%$ correspond au coefficient

$$1 + \frac{p}{100},$$

tandis qu'une baisse de $p\,\%$ correspond au coefficient

$$1 - \frac{p}{100}.$$

Exemple 6. *Un article de* 120 *euros augmente de* $8\,\%$*. Son nouveau prix est*

$$120 \times 1{,}08 = 129{,}60 \text{ euros.}$$

S'il baisse ensuite de $8\,\%$*, son prix devient*

$$129{,}60 \times 0{,}92 = 119{,}232 \text{ euros.}$$

Il ne retrouve donc pas son prix initial.

5.3 Évolutions successives

Propriété 3. *Si une grandeur subit successivement des évolutions de taux décimaux* $t_1, t_2, \ldots, t_n$*, son coefficient multiplicateur global est*

$$CM_{\text{global}} = \prod_{i=1}^{n}(1+t_i).$$

Le taux d'évolution global est

$$t_{\text{global}} = \prod_{i=1}^{n}(1+t_i) - 1.$$

Exemple 7. *Une quantité augmente de* $20\,\%$*, puis diminue de* $10\,\%$*. Le coefficient global vaut*

$$1{,}20 \times 0{,}90 = 1{,}08.$$

L'évolution globale est donc une hausse de $8\,\%$*.*

Les taux successifs ne s'additionnent pas directement.

5.4 Évolution réciproque

Propriété 4. *Pour annuler une évolution de coefficient multiplicateur* $CM \neq 0$*, il faut appliquer le coefficient réciproque*

$$CM' = \frac{1}{CM}.$$

Le taux réciproque est

$$t' = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}.$$

Exemple 8. *Après une hausse de* $25\,\%$*, le coefficient multiplicateur est* 1,25*. Pour revenir à la valeur initiale, il faut multiplier par*

$$\frac{1}{1{,}25} = 0{,}8.$$

Il faut donc appliquer une baisse de $20\,\%$*.*

6 Points de pourcentage et variation relative

Il convient de distinguer deux notions.

— Une différence en points de pourcentage est la différence entre deux taux exprimés en pourcentage.
— Une variation relative mesure cette différence par rapport au taux initial.

Exemple 9. *Un taux passe de* 20 % *à* 25 %.

La hausse est de 5 *points de pourcentage. La variation relative du taux est*

$$\frac{25-20}{20} = 0{,}25,$$

soit 25 %.

Cette distinction est particulièrement importante dans l'interprétation des données économiques, électorales et démographiques.

7 Pourcentages et statistiques

Les pourcentages sont utilisés pour comparer des populations de tailles différentes, à condition de préciser la population de référence.

Exemple 10. *Dans un établissement de* 400 *élèves,* 120 *pratiquent une activité sportive en club. La proportion correspondante est*

$$\frac{120}{400} \times 100 = 30\,\%.$$

Dans un autre établissement de 250 *élèves,* 100 *élèves pratiquent cette activité, soit*

$$\frac{100}{250} \times 100 = 40\,\%.$$

Le second établissement présente une proportion plus élevée, même si le nombre d'élèves concernés est plus faible.

7.1 Pourcentage global de plusieurs groupes

Le pourcentage global de plusieurs groupes se calcule à partir des effectifs, et non en effectuant systématiquement la moyenne arithmétique des pourcentages.

Exemple 11. *Un groupe de* 20 *personnes compte* 50 % *de femmes. Un groupe de* 80 *personnes en compte* 30 %.

Le nombre total de femmes est

$$20 \times 0{,}50 + 80 \times 0{,}30 = 34.$$

La proportion globale est

$$\frac{34}{100} = 34\,\%.$$

La moyenne arithmétique des deux taux, égale à 40 %, *serait incorrecte puisque les groupes n'ont pas la même taille.*

8 Applications pédagogiques

8.1 Progression possible

Une progression pédagogique peut être organisée en quatre étapes :

1. interpréter un pourcentage comme une fraction de dénominateur 100 ;
2. résoudre les trois problèmes fondamentaux ;
3. étudier les hausses, les baisses et les évolutions successives ;
4. interpréter des données réelles et critiquer des affirmations chiffrées.

8.2 Erreurs fréquentes

— Confondre $p\,\%$ et p : par exemple, $15\,\% = 0{,}15$, et non 15.
— Utiliser une mauvaise quantité de référence.
— Additionner les taux d'évolutions successives.
— Penser qu'une hausse de $p\,\%$ suivie d'une baisse de $p\,\%$ ramène à la valeur initiale.
— Confondre points de pourcentage et variation relative.
— Calculer la moyenne simple de pourcentages portant sur des groupes de tailles différentes.

8.3 Évaluation

L'évaluation peut comporter :

— un calcul direct de pourcentage ;
— un problème de recherche d'un total ;
— une situation d'évolution successive ;
— une interprétation de tableau statistique ;
— une justification de la méthode choisie.

On évaluera autant la maîtrise des calculs que la capacité à expliciter la référence utilisée et à interpréter le résultat obtenu.

9 Liste d'exercices

Exercice 1 – Calculer une proportion

Dans un lycée de 720 élèves, 45 % des élèves sont externes.

a) Calculer le nombre d'externes.
b) Calculer le nombre d'élèves qui ne sont pas externes.
c) Expliquer pourquoi le nombre obtenu doit être entier.

Exercice 2 – Déterminer un pourcentage

Sur 250 articles contrôlés, 18 présentent un défaut.

a) Calculer le pourcentage d'articles défectueux.
b) Combien d'articles défectueux prévoirait-on pour un lot de 1 000 articles si la même proportion était observée ?
c) Préciser la différence entre le résultat calculé et une prévision statistique.

Exercice 3 – Retrouver la valeur initiale

Après une remise de 20 %, un appareil coûte 240 euros.

a) Déterminer le coefficient multiplicateur associé à la remise.
b) Calculer le prix initial.
c) Expliquer pourquoi il ne faut pas ajouter simplement 20 % au prix soldé.

Exercice 4 – Évolutions successives

Le prix d'un produit est initialement de 150 euros. Il augmente de 12 %, puis diminue de 15 %.

a) Calculer le prix après chaque évolution.
b) Déterminer le coefficient multiplicateur global.
c) Calculer le taux d'évolution global.
d) Comparer le résultat à une baisse directe de 3 %.

Exercice 5 – Évolution réciproque

Une entreprise augmente un tarif de 18 %.

a) Déterminer le coefficient multiplicateur.
b) Calculer le taux de baisse permettant de revenir au tarif initial.
c) Donner une interprétation du résultat.

Exercice 6 – Points de pourcentage

La proportion d'élèves obtenant une certification passe de 64 % à 72 %.

a) Calculer l'augmentation en points de pourcentage.
b) Calculer la variation relative de cette proportion.
c) Expliquer la différence entre les deux résultats.

Exercice 7 – Pourcentage global

Dans un établissement, la classe A compte 24 élèves, dont 75 % de filles. La classe B compte 36 élèves, dont 50 % de filles.

a) Calculer le nombre de filles dans chaque classe.
b) Déterminer le pourcentage global de filles.
c) Expliquer pourquoi la moyenne des deux pourcentages ne donne pas le résultat attendu.

Exercice 8 – Pourcentages et équations

Une quantité augmente de p % et passe de 80 à 94.

a) Écrire une équation permettant de déterminer p.
b) Résoudre cette équation.
c) Vérifier le résultat obtenu.

Exercice 9 – Esprit critique

Une publicité annonce : « Après une hausse de 30 %, nous baissons nos prix de 30 % ! »

a) Calculer le coefficient multiplicateur global.
b) Déterminer le taux d'évolution global.
c) Expliquer pourquoi le prix final n'est pas le prix initial.

Exercice 10 – Modélisation

Une population compte initialement 12 000 habitants. Elle augmente de 2 % par an pendant trois ans, le taux annuel étant supposé constant.

a) Calculer la population théorique après un an.
b) Établir une expression de la population après trois ans.
c) Calculer cette population, puis arrondir à l'unité.
d) Comparer cette évolution à une augmentation totale de 6 %.

10 Indications de correction

1. Exercice 1 : $720 \times 0{,}45 = 324$ externes ; 396 autres élèves.
2. Exercice 2 : $\dfrac{18}{250} \times 100 = 7{,}2\,\%$; pour 1 000 articles, l'effectif prévu est 72.
3. Exercice 3 : $CM = 0{,}8$; prix initial $= 240/0{,}8 = 300$ euros.
4. Exercice 4 : $150 \times 1{,}12 = 168$ euros, puis $168 \times 0{,}85 = 142{,}80$ euros. Le coefficient global est 0,952, soit une baisse de 4,8 %.
5. Exercice 5 : Le coefficient réciproque est $1/1{,}18$. Le taux de baisse est $\dfrac{1}{1{,}18} - 1 \approx -15{,}25\,\%$.
6. Exercice 6 : Hausse de 8 points ; variation relative $\dfrac{72-64}{64} = 12{,}5\,\%$.
7. Exercice 7 : 18 filles en A et 18 en B ; total de 36 filles sur 60 élèves, soit 60 %.
8. Exercice 8 : $80(1 + p/100) = 94$, donc $p = 17{,}5$.
9. Exercice 9 : $1{,}30 \times 0{,}70 = 0{,}91$; baisse globale de 9 %.
10. Exercice 10 : $12\,000 \times 1{,}02^3 = 12\,734{,}496$, soit environ 12 734 habitants. Le coefficient global est 1,061208, correspondant à une hausse de 6,1208 %.

11 Conclusion

Les pourcentages relient proportionnalité, fractions, coefficients multiplicateurs et taux d'évolution. Leur maîtrise exige de choisir explicitement la quantité de référence, de distinguer partie et total et de composer correctement les évolutions successives.

Au-delà du calcul, ils constituent un outil essentiel d'interprétation des données et de formation de l'esprit critique. L'étude des erreurs fréquentes permet de mettre en évidence le sens des opérations et de consolider les compétences de modélisation.

12 Références bibliographiques et institutionnelles

1. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège*, notamment les ressources relatives aux rapports, à la proportionnalité et aux pourcentages. Consulter le

portail Éduscol : https://eduscol.education.fr/.

2. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, pour les prolongements sur les évolutions, les fonctions et les statistiques. Consulter : https://www.education.gouv.fr/.
3. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques de la voie professionnelle*, pour les situations contextualisées et les applications aux enseignements professionnels. Consulter : https://eduscol.education.fr/.
4. IREM, ressources pédagogiques en didactique des mathématiques, notamment sur la proportionnalité et les raisonnements multiplicatifs. Portail des IREM : https://www.univ-irem.fr/.
5. INSEE, ressources pédagogiques et données statistiques permettant de construire des exercices sur les proportions, les taux et leur interprétation. https://www.insee.fr/.

Remarque pour la préparation du CAPES : il est recommandé de consulter les programmes officiels en vigueur pour le niveau choisi et les rapports de jury du CAPES de mathématiques disponibles sur le site du ministère. Les références ci-dessus indiquent des portails institutionnels ; elles ne désignent pas une édition précise d'un document.