Leçon de CAPES de mathématiques

Systèmes d'équations et systèmes d'inéquations

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**

2.1 Prérequis 2

2.2 Objectifs 2

3 Systèmes d'équations **2**

3.1 Définition 2

3.2 Résolution par substitution 3

3.3 Résolution par élimination 3

3.4 Résolution par une méthode matricielle 4

3.5 Interprétation géométrique 4

3.6 Exemples des trois situations 4

4 Systèmes d'inéquations **5**

4.1 Systèmes d'inéquations à une inconnue 5

4.2 Systèmes d'inéquations à deux inconnues 5

4.3 Méthode graphique 6

5 Applications **6**

5.1 Problème de recherche de deux quantités 6

5.2 Problème de contraintes de production 6

6 Difficultés et erreurs fréquentes **7**

7 Liste d'exercices **7**

8 Conclusion **9**

9 Références bibliographiques et institutionnelles **9**

1 Introduction

Les systèmes d'équations et d'inéquations occupent une place importante dans l'enseignement des mathématiques. Ils permettent de traduire des situations comportant plusieurs contraintes et de déterminer les valeurs des inconnues qui satisfont simultanément ces contraintes.

Les systèmes d'équations interviennent notamment dans la résolution de problèmes algébriques, l'étude des intersections de courbes, la géométrie analytique et la modélisation de situations concrètes. Les systèmes d'inéquations permettent quant à eux de décrire des domaines de contraintes, en particulier dans les problèmes d'optimisation linéaire.

Cette leçon présente les principales méthodes de résolution, leur interprétation géométrique, ainsi que leurs applications dans l'enseignement secondaire.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les élèves doivent maîtriser :

- le calcul numérique et littéral ;
- la résolution d'équations du premier degré à une inconnue ;
- la résolution d'inéquations et la représentation des intervalles de solutions ;
- les opérations sur les fractions et les nombres relatifs ;
- le repérage dans le plan et les coordonnées d'un point ;
- la représentation graphique d'une fonction affine ;
- les notions de fonction, de droite et d'intersection.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite que les élèves soient capables :

- de traduire un problème par un système d'équations ou d'inéquations ;
- de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues par substitution ou élimination ;
- d'interpréter géométriquement les solutions d'un système ;
- de distinguer un système sans solution, un système à solution unique et un système ayant une infinité de solutions ;
- de résoudre un système d'inéquations à une inconnue ;
- de représenter graphiquement les solutions d'un système d'inéquations à deux inconnues ;
- de vérifier la cohérence d'une solution et de la replacer dans le contexte du problème.

3 Systèmes d'équations

3.1 Définition

Un système de deux équations à deux inconnues peut s'écrire

$$\begin{cases} ax + by = e, \\ cx + dy = f, \end{cases}$$

où a, b, c, d, e, f sont des nombres réels.

Une solution du système est un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ qui vérifie simultanément les deux équations.

L'ensemble des solutions est noté

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = e \text{ et } cx + dy = f\right\}.$$

3.2 Résolution par substitution

La méthode de substitution consiste à exprimer une inconnue en fonction de l'autre dans une équation, puis à remplacer cette expression dans la seconde équation.

Exemple. Résoudre

$$\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x - y = 5. \end{cases}$$

La première équation donne $y = 7 - x$. En substituant dans la seconde, on obtient

$$2x - (7 - x) = 5,$$

d'où

$$3x = 12, \qquad x = 4.$$

Par conséquent, $y = 7 - 4 = 3$.

Ainsi,

$$\boxed{S = \{(4, 3)\}.}$$

Cette méthode est particulièrement adaptée lorsqu'une équation permet d'isoler facilement une inconnue.

3.3 Résolution par élimination

La méthode d'élimination, également appelée méthode par combinaison linéaire, consiste à multiplier éventuellement les équations par des nombres adaptés, puis à les additionner ou les soustraire afin d'éliminer une inconnue.

Exemple. Résoudre

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 4x - 3y = 6. \end{cases}$$

En additionnant les deux équations, on obtient

$$6x = 18, \qquad x = 3.$$

En remplaçant dans la première équation,

$$6 + 3y = 12, \qquad y = 2.$$

Ainsi,

$$\boxed{S = \{(3, 2)\}.}$$

Cette méthode est efficace lorsque les coefficients d'une inconnue sont égaux ou opposés, ou peuvent le devenir après multiplication des équations.

3.4 Résolution par une méthode matricielle

Le système peut s'écrire sous la forme

$$AX = B,$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de la matrice A est

$$\Delta = ad - bc.$$

Si $\Delta \neq 0$, la matrice A est inversible et le système admet une unique solution :

$$X = A^{-1}B.$$

On obtient explicitement

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Si $\Delta = 0$, il faut examiner la compatibilité des équations : le système peut n'avoir aucune solution ou en avoir une infinité.

3.5 Interprétation géométrique

Chaque équation linéaire à deux inconnues représente, lorsque ses coefficients ne sont pas simultanément nuls, une droite du plan.

Les solutions du système correspondent aux points communs aux deux droites.

Trois situations sont possibles :

1. Les droites sont sécantes : le système admet une solution unique.
2. Les droites sont parallèles et distinctes : le système n'admet aucune solution.
3. Les droites sont confondues : le système admet une infinité de solutions.

Cette interprétation permet de relier les calculs algébriques à une représentation géométrique.

3.6 Exemples des trois situations

Solution unique :

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

La solution est $(3, 2)$.

Aucune solution :

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Les deux équations sont incompatibles, donc $S = \varnothing$.

Une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ 2x + 2y = 8. \end{cases}$$

La seconde équation est équivalente à la première. Ainsi,

$$S = \{(x, 4 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}.$$

4 Systèmes d'inéquations

4.1 Systèmes d'inéquations à une inconnue

Un système d'inéquations à une inconnue consiste à rechercher les réels qui vérifient simultanément plusieurs inéquations.

L'ensemble des solutions est l'intersection des ensembles de solutions de chaque inéquation.

Exemple. Résoudre

$$\begin{cases} 2x - 1 \leq 5, \\ x + 2 > 0. \end{cases}$$

La première inéquation équivaut à

$$x \leq 3.$$

La seconde équivaut à

$$x > -2.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{S =]-2, 3].}$$

Il est essentiel de respecter le sens des inégalités : la multiplication ou la division par un nombre négatif inverse le sens de l'inégalité.

4.2 Systèmes d'inéquations à deux inconnues

Un système d'inéquations linéaires à deux inconnues peut s'écrire

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y \leq c_1, \\ a_2 x + b_2 y \leq c_2, \\ \vdots \\ a_n x + b_n y \leq c_n. \end{cases}$$

Chaque inéquation définit un demi-plan délimité par une droite. L'ensemble des solutions du système est l'intersection des demi-plans correspondants.

Exemple. Considérons

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 8. \end{cases}$$

Les deux premières inéquations imposent de se placer dans le premier quadrant. Les deux autres définissent des demi-plans supplémentaires.

Le domaine admissible est l'intersection de ces quatre régions. Il est délimité par les axes et par les droites

$$x + y = 6 \qquad \text{et} \qquad 2x + y = 8.$$

Le point d'intersection des deux droites est obtenu par

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 2x + y = 8, \end{cases}$$

soit $(x, y) = (2, 4)$.

Les sommets du domaine admissible sont

$$(0, 0), \quad (4, 0), \quad (2, 4), \quad (0, 6).$$

Ces sommets sont utiles notamment pour les problèmes d'optimisation linéaire.

4.3 Méthode graphique

Pour résoudre graphiquement un système d'inéquations :

1. tracer les droites frontières ;
2. déterminer, pour chaque inéquation, le demi-plan correspondant ;
3. représenter chaque demi-plan ;
4. prendre l'intersection des régions obtenues ;
5. préciser si les frontières sont incluses ou exclues.

Pour une inégalité large, telle que $\leq$ ou $\geq$, la frontière est incluse. Pour une inégalité stricte, telle que $<$ ou $>$, elle est exclue.

La résolution graphique donne une représentation du domaine des solutions, mais une justification algébrique peut être nécessaire pour établir précisément ses propriétés.

5 Applications

5.1 Problème de recherche de deux quantités

Un cinéma vend des billets adultes à 12 euros et des billets enfants à 7 euros. Une séance a rapporté 380 euros grâce à la vente de 40 billets.

On note x le nombre de billets adultes et y le nombre de billets enfants.

Le problème se traduit par

$$\begin{cases} x + y = 40, \\ 12x + 7y = 380. \end{cases}$$

En multipliant la première équation par 7 puis en la soustrayant de la seconde, on obtient

$$5x = 100, \qquad x = 20.$$

Par conséquent, $y = 20$.

La solution est compatible avec le contexte : 20 billets adultes et 20 billets enfants ont été vendus.

5.2 Problème de contraintes de production

Une entreprise fabrique deux produits, notés A et B. La production est représentée par les variables x et y.

Les contraintes de production sont

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 100, \\ 2x + y \leq 160. \end{cases}$$

Les deux premières contraintes expriment la non-négativité des quantités produites. Les deux dernières représentent les limitations de ressources.

Le système définit un domaine admissible. Si l'on cherche à maximiser une fonction économique affine, par exemple

$$P(x, y) = 30x + 20y,$$

on peut étudier cette fonction sur le domaine admissible.

Dans le cadre d'un problème d'optimisation linéaire à deux variables, lorsque le domaine admissible est un polygone non vide et borné, un maximum et un minimum d'une fonction affine y sont atteints en au moins un sommet du polygone.

Il convient donc de déterminer les sommets admissibles, puis de calculer la valeur de la fonction objectif en chacun d'eux.

6 Difficultés et erreurs fréquentes

Les difficultés rencontrées par les élèves concernent notamment :

- la confusion entre une solution d'une équation et une solution d'un système ;
- l'application incorrecte de la distributivité ou la réduction d'expressions algébriques ;
- l'oubli de multiplier tous les termes d'une équation lors d'une combinaison linéaire ;
- l'inversion incorrecte du sens d'une inégalité lors d'une division par un nombre négatif ;
- la confusion entre réunion et intersection d'ensembles de solutions ;
- l'interprétation erronée des frontières dans la représentation graphique d'un système d'inéquations ;
- l'acceptation de solutions incompatibles avec les contraintes concrètes d'un problème.

Pour prévenir ces erreurs, il est utile de faire vérifier les solutions dans les équations initiales et de relier systématiquement les méthodes algébriques à leur interprétation graphique.

7 Liste d'exercices

Exercice 1 – Résolution par substitution

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x + 2y = 11, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Objectif : maîtriser la substitution et vérifier la solution obtenue.

Exercice 2 – Résolution par élimination

Résoudre :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 16, \\ 5x - 2y = 8. \end{cases}$$

Objectif : utiliser une combinaison linéaire pour éliminer une inconnue.

Exercice 3 – Discussion d'un système

Selon les valeurs du paramètre réel m, discuter le nombre de solutions du système

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + my = 4. \end{cases}$$

Objectif : étudier les cas de solution unique, d'absence de solution et d'infinité de solutions.

Exercice 4 – Interprétation géométrique

Déterminer l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$$

Interpréter graphiquement le résultat.

Objectif : comprendre le lien entre dépendance des équations et droites confondues.

Exercice 5 – Système d'inéquations à une inconnue

Résoudre :

$$\begin{cases} 3x - 2 < 7, \\ 2x + 1 \geq -3, \\ x \leq 4. \end{cases}$$

Représenter l'ensemble des solutions sur une droite graduée.

Objectif : déterminer une intersection d'intervalles.

Exercice 6 – Domaine admissible

Représenter graphiquement l'ensemble des solutions de

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 5, \\ x + 2y \leq 6. \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées des sommets du domaine admissible.

Objectif : représenter l'intersection de demi-plans.

Exercice 7 – Problème de modélisation

Un théâtre vend des places à 18 euros et à 12 euros. Au total, 150 places ont été vendues pour une recette de 2 400 euros.

Déterminer le nombre de places vendues à chaque tarif.

Objectif : construire un système à partir d'un énoncé et interpréter sa solution.

Exercice 8 – Optimisation linéaire

Déterminer le maximum de

$$P(x, y) = 4x + 3y$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y \leq 8, \\ 2x + y \leq 10. \end{cases}$$

On déterminera les sommets du domaine admissible et on calculera la fonction objectif en chacun d'eux.

Objectif : mobiliser les systèmes d'inéquations dans un problème d'optimisation.

Exercice 9 – Activité avec un outil numérique

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, représenter les droites associées aux inéquations de l'exercice 6. Modifier les coefficients et observer l'évolution du domaine admissible.

Objectif : relier les représentations algébriques et graphiques et développer l'autonomie.

8 Conclusion

Les systèmes d'équations permettent de déterminer les inconnues satisfaisant plusieurs relations simultanées. Les méthodes de substitution, d'élimination et les outils matriciels offrent différentes approches de résolution.

Les systèmes d'inéquations décrivent des ensembles de contraintes dont l'intersection constitue le domaine des solutions. Leur interprétation graphique facilite la compréhension des problèmes de modélisation et d'optimisation.

Dans l'enseignement, l'enjeu consiste à articuler calcul algébrique, représentation graphique et résolution de problèmes, en adaptant le niveau de formalisation aux connaissances des élèves.

9 Références bibliographiques et institutionnelles

1. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes en vigueur sont consultables sur : `https://www.education.gouv.fr/`.
2. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. `https://www.education.gouv.fr/`.
3. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques de la voie professionnelle*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. `https://www.education.gouv.fr/`.
4. IREM (Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques), ressources pédagogiques relatives à l'algèbre, à la résolution de problèmes et à l'enseignement des mathématiques. `https://www.univ-irem.fr/`.
5. GeoGebra, logiciel de géométrie dynamique et de représentation graphique. `https://www.geogebra.org/`.

Les programmes et ressources institutionnelles doivent être consultés dans leur version en vigueur afin de préciser les attendus correspondant au niveau scolaire retenu.