Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Droites et plans de l'espace

Table des matières

1 Introduction et problématique **1**

2 Prérequis et objectifs **1**
- 2.1 Prérequis . . . 1
- 2.2 Objectifs . . . 1

3 Cadre vectoriel et géométrie affine **2**
- 3.1 Colinéarité et coplanarité . . . 2

4 Droites de l'espace **2**
- 4.1 Définition et caractérisation vectorielle . . . 2
- 4.2 Représentation paramétrique . . . 2
- 4.3 Détermination d'une droite . . . 3
- 4.4 Positions relatives de deux droites . . . 3

5 Plans de l'espace **3**
- 5.1 Caractérisation vectorielle . . . 3
- 5.2 Représentation paramétrique d'un plan . . . 4
- 5.3 Vecteur normal et équation cartésienne . . . 4
- 5.4 Détermination d'un plan . . . 4

6 Positions relatives **5**
- 6.1 Position relative d'une droite et d'un plan . . . 5
- 6.2 Position relative de deux plans . . . 5
- 6.3 Synthèse . . . 5

7 Orthogonalité et applications **5**
- 7.1 Orthogonalité d'une droite et d'un plan . . . 5
- 7.2 Orthogonalité de deux plans . . . 6
- 7.3 Distance d'un point à un plan . . . 6
- 7.4 Exemples d'applications . . . 6

8 Exercices proposés **6**
- 8.1 Exercices de base . . . 6
- 8.2 Exercices intermédiaires . . . 7
- 8.3 Exercices d'approfondissement . . . 7

9 Éléments de correction **8**
- 9.1 Exercice 1 . . . 8
- 9.2 Exercice 2 . . . 8
- 9.3 Exercice 3 . . . 8
- 9.4 Exercice 4 . . . 8

9.5 Exercice 5 . . . 9
9.6 Exercice 6 . . . 9
9.7 Exercice 7 . . . 9
9.8 Exercice 8 . . . 9
9.9 Exercice 9 . . . 10

10 Questions possibles à l'oral **10**

11 Conclusion **10**

1 Introduction et problématique

La géométrie de l'espace permet de décrire des configurations tridimensionnelles à l'aide d'objets fondamentaux : les points, les droites et les plans. Elle articule deux approches complémentaires : une approche géométrique, fondée sur les incidences, le parallélisme et les intersections, et une approche analytique, dans laquelle les coordonnées et les vecteurs permettent de traduire les propriétés géométriques en équations.

L'objectif de cette leçon est de montrer comment les outils du calcul vectoriel et de l'algèbre linéaire permettent de caractériser une droite ou un plan, de déterminer leurs positions relatives et de résoudre des problèmes géométriques.

La problématique peut être formulée ainsi :

> Comment passer d'une description géométrique des droites et des plans de l'espace à une caractérisation vectorielle ou analytique permettant de déterminer leurs positions relatives ?

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les prérequis sont les suivants :

— coordonnées des points et des vecteurs dans un repère de l'espace ;

— opérations sur les vecteurs et colinéarité ;

— combinaison linéaire, famille génératrice et indépendance linéaire ;

— résolution de systèmes d'équations linéaires ;

— produit scalaire, orthogonalité et, si nécessaire, produit vectoriel ;

— équations de droites dans le plan et résolution de problèmes d'intersection.

2.2 Objectifs

À l'issue de la leçon, on doit être capable de :

— caractériser une droite et un plan par des points et des vecteurs directeurs ;

— déterminer des représentations paramétriques de droites et de plans ;

— obtenir une équation cartésienne d'un plan ;

— étudier les positions relatives de deux droites, d'une droite et d'un plan, ou de deux plans ;

— traduire un problème géométrique en un système d'équations et interpréter ses solutions ;

— mobiliser ces résultats dans des problèmes de géométrie et dans des situations concrètes.

3 Cadre vectoriel et géométrie affine

On travaille dans l'espace affine euclidien de dimension trois, dont l'espace vectoriel associé est noté $\mathbb{R}^3$.

On fixe un repère $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Un point M est repéré par ses coordonnées (x, y, z) et son vecteur-position est

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

3.1 Colinéarité et coplanarité

Définition 3.1. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si l'un est un multiple de l'autre.

Trois points A, B, C sont alignés si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Quatre points A, B, C, D sont coplanaires si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont liés.

Lorsque les vecteurs sont exprimés dans une base de $\mathbb{R}^3$, la colinéarité se vérifie par proportionnalité des coordonnées. La coplanarité de trois vecteurs se traduit par l'annulation du déterminant de la matrice formée par leurs coordonnées.

Proposition 3.2. *Si A, B et C sont trois points non alignés, il existe un unique plan contenant ces trois points.*

Proposition 3.3. *Par deux points distincts passe une unique droite. Par un point et une direction non nulle passe une unique droite.*

Ces résultats constituent les propriétés d'incidence fondamentales de la géométrie affine.

4 Droites de l'espace

4.1 Définition et caractérisation vectorielle

Définition 4.1. Une droite $\mathcal{D}$ est déterminée par un point A et un vecteur directeur non nul $\vec{u}$.

Un point M appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}.$$

Si A a pour coordonnées (x_A, y_A, z_A) et si $\vec{u} = (a, b, c)$, alors

$$M(x, y, z) \in \mathcal{D} \iff \begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

4.2 Représentation paramétrique

Définition 4.2. Une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ est un système de la forme

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + at, \\ y = y_A + bt, \\ z = z_A + ct, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},}$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Exemple 4.3. La droite passant par $A(1, 0, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, 3)$ admet la représentation

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -t, \\ z = 2 + 3t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Une droite de l'espace n'admet généralement pas une équation cartésienne unique : elle peut être décrite par l'intersection de deux plans non parallèles.

4.3 Détermination d'une droite

Pour déterminer une droite, on peut disposer :

— de deux points distincts A et B, auquel cas $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur ;

— d'un point et d'un vecteur directeur non nul ;

— de deux plans non parallèles, dont l'intersection est une droite.

4.4 Positions relatives de deux droites

Deux droites de l'espace peuvent être :

— confondues ;

— parallèles distinctes ;

— sécantes ;

— non coplanaires, auquel cas elles sont dites gauches.

Deux droites distinctes et non parallèles ne sont donc pas nécessairement sécantes, contrairement au cas du plan.

Proposition 4.4. *Soient*

$$\mathcal{D}_1 : \ M = A + t\vec{u}, \qquad \mathcal{D}_2 : \ M = B + s\vec{v}.$$

Les droites sont sécantes si et seulement si le système

$$A + t\vec{u} = B + s\vec{v}$$

admet une solution $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

Elles sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Si elles sont parallèles et possèdent un point commun, elles sont confondues.

Le système vectoriel précédent équivaut à trois équations scalaires. Lorsque les directions ne sont pas colinéaires, l'absence de solution signifie que les droites sont gauches.

5 Plans de l'espace

5.1 Caractérisation vectorielle

Définition 5.1. Un plan $\mathcal{P}$ est déterminé par un point A et deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Un point M appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si

$$\overrightarrow{AM} = s\vec{u} + t\vec{v}$$

pour certains réels s, t.

5.2 Représentation paramétrique d'un plan

Si

$$A(x_A, y_A, z_A), \quad \vec{u} = (a, b, c), \quad \vec{v} = (a', b', c'),$$

avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, alors

$$\boxed{\begin{cases} x = x_A + sa + ta', \\ y = y_A + sb + tb', \\ z = z_A + sc + tc', \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.}$$

Exemple 5.2. Le plan passant par $A(1,0,0)$ et dirigé par $\vec{u} = (1,1,0)$ et $\vec{v} = (0,1,1)$ admet pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1 + s, \\ y = s + t, \\ z = t, \end{cases} \qquad (s,t) \in \mathbb{R}^2.$$

5.3 Vecteur normal et équation cartésienne

Définition 5.3. Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan.

Si $\vec{n} = (a, b, c)$ est normal au plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$, alors

$$M \in \mathcal{P} \iff \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

Ainsi,

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

On obtient une équation cartésienne :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0,}$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Proposition 5.4. *Tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Le vecteur (a, b, c) est un vecteur normal au plan.*

Exemple 5.5. Le plan passant par $A(1, 0, 0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2, -1, 3)$ a pour équation

$$2(x - 1) - y + 3z = 0,$$

soit

$$\boxed{2x - y + 3z - 2 = 0.}$$

5.4 Détermination d'un plan

On peut déterminer un plan à partir :

- de trois points non alignés ;
- d'un point et de deux vecteurs directeurs non colinéaires ;
- d'un point et d'un vecteur normal non nul ;
- d'une droite et d'un point extérieur à cette droite ;
- de deux droites sécantes ou de deux droites parallèles distinctes.

Lorsque trois points A, B et C ne sont pas alignés, on peut calculer un vecteur normal à l'aide du produit vectoriel :

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Ce vecteur est non nul puisque les deux vecteurs sont non colinéaires.

6 Positions relatives

6.1 Position relative d'une droite et d'un plan

Soit une droite

$$\mathcal{D} : \ M = A + t\vec{u}$$

et un plan d'équation

$$\mathcal{P} : \ ax + by + cz + d = 0.$$

Posons $\vec{n} = (a, b, c)$.

Trois situations sont possibles :

1. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, la droite coupe le plan en un unique point.
2. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et si $A \in \mathcal{P}$, la droite est contenue dans le plan.
3. Si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ et si $A \notin \mathcal{P}$, la droite est strictement parallèle au plan.

Pour déterminer une éventuelle intersection, on remplace les coordonnées paramétriques de la droite dans l'équation du plan. On obtient une équation en t.

6.2 Position relative de deux plans

Considérons deux plans

$$\mathcal{P}_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0,$$
$$\mathcal{P}_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0.$$

Leurs vecteurs normaux sont

$$\vec{n}_1 = (a_1, b_1, c_1), \qquad \vec{n}_2 = (a_2, b_2, c_2).$$

— Si les vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, les plans sont sécants suivant une droite.

— Si les vecteurs normaux sont colinéaires, les plans sont parallèles ou confondus.

Dans le second cas, on compare les équations complètes : elles définissent le même plan si leurs coefficients sont proportionnels, y compris le terme constant.

L'intersection de deux plans sécants se détermine en résolvant le système constitué de leurs deux équations.

6.3 Synthèse

Objets	Condition géométrique	Nature de l'intersection
Deux droites	Directions colinéaires	Vide ou droite entière
Deux droites	Directions non colinéaires	Vide ou un point
Droite et plan	Droite contenue dans le plan	Droite
Droite et plan	Droite parallèle extérieure	Vide
Droite et plan	Droite sécante	Un point
Deux plans	Plans confondus	Plan
Deux plans	Plans parallèles distincts	Vide
Deux plans	Plans sécants	Une droite

7 Orthogonalité et applications

7.1 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition 7.1. Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de ce plan.

En particulier, une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est orthogonale à un plan de vecteur normal $\vec{n}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

7.2 Orthogonalité de deux plans

Deux plans sont perpendiculaires si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux. Pour des vecteurs normaux $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$, la condition est

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

7.3 Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormé, la distance du point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ au plan

$$\mathcal{P} : \ ax + by + cz + d = 0$$

est donnée par

$$\boxed{d(M_0, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Cette formule découle de la projection orthogonale du point sur le plan, dans la direction du vecteur normal.

7.4 Exemples d'applications

Les outils précédents interviennent notamment dans :

— la détermination de l'intersection de deux surfaces planes dans un modèle géométrique ;

— la vérification de l'alignement, de la coplanarité ou du parallélisme dans un solide ;

— le calcul de distances en géométrie de l'espace ;

— la modélisation de trajectoires rectilignes et de surfaces planes en mécanique ou en architecture ;

— la résolution de problèmes de géométrie analytique par des systèmes linéaires.

8 Exercices proposés

Les exercices suivants sont classés par difficulté croissante. Ils peuvent être utilisés pour illustrer les notions de la leçon ou pour préparer les questions susceptibles d'être posées à l'oral.

8.1 Exercices de base

Exercice 8.1 (Représentation paramétrique d'une droite)**.** Dans un repère de l'espace, on considère les points $A(1, 2, -1)$ et $B(3, -1, 2)$.

1. Déterminer un vecteur directeur de (AB).
2. Écrire une représentation paramétrique de (AB).
3. Déterminer si le point $C(5, -4, 5)$ appartient à (AB).

Exercice 8.2 (Équation d'un plan)**.** Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1, 0, 2)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(0, 1, 1)$.

Vérifier que les trois points appartiennent au plan obtenu.

Exercice 8.3 (Intersection d'une droite et d'un plan)**.** On considère la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3t \end{cases}$$

et le plan

$$\mathcal{P} : \ 2x - y + z - 1 = 0.$$

Déterminer leur position relative et, le cas échéant, les coordonnées du point d'intersection.

8.2 Exercices intermédiaires

Exercice 8.4 (Deux droites de l'espace)**.** On considère

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 1 - t \end{cases} \qquad \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x = 2 + s, \\ y = 1 + s, \\ z = s. \end{cases}$$

Étudier la position relative de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Si elles sont sécantes, déterminer leur point d'intersection. Sinon, préciser si elles sont parallèles ou gauches.

Exercice 8.5 (Intersection de deux plans)**.** On considère les plans

$$\mathcal{P}_1 : \ x + y + z = 3, \qquad \mathcal{P}_2 : \ 2x - y + z = 1.$$

1. Montrer que ces plans sont sécants.
2. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
3. Vérifier le résultat en substituant les coordonnées paramétriques dans les deux équations.

Exercice 8.6 (Orthogonalité)**.** Déterminer une équation du plan passant par $A(1, 2, 0)$ et orthogonal à la droite de vecteur directeur $\vec{u} = (2, -1, 3)$.

Déterminer ensuite la projection orthogonale de $B(0, 0, 0)$ sur ce plan.

8.3 Exercices d'approfondissement

Exercice 8.7 (Coplanarité de quatre points)**.** On considère

$$A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1), \quad D(1, 1, 1).$$

1. Déterminer une équation du plan (ABC).
2. Le point D appartient-il à ce plan ?
3. Interpréter le résultat en termes de coplanarité.

Exercice 8.8 (Paramètre et position relative)**.** Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le plan

$$\mathcal{P}_m : \ x + my + z = 1$$

et la droite

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - t, \\ z = t. \end{cases}$$

Étudier, suivant les valeurs de m, la position relative de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}_m$.

Exercice 8.9 (Géométrie d'un tétraèdre)**.** Dans un repère orthonormé, on considère le tétraèdre $OABC$, où

$$O(0, 0, 0), \quad A(1, 0, 0), \quad B(0, 1, 0), \quad C(0, 0, 1).$$

1. Déterminer les équations des plans (ABC), (OAB) et (OAC).
2. Étudier les positions relatives de ces plans.
3. Calculer la distance de O au plan (ABC).
4. Interpréter géométriquement cette distance.

9 Éléments de correction

9.1 Exercice 1

On a

$$\overrightarrow{AB} = (2, -3, 3).$$

Une représentation paramétrique est

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = -1 + 3t. \end{cases}$$

Pour $C(5, -4, 5)$, la première équation donne $t = 2$. Les deux autres sont alors vérifiées : $C \in (AB)$.

9.2 Exercice 2

On calcule

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -2), \qquad \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -1).$$

Un vecteur normal est

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 3, 2).$$

Une équation du plan passant par A est donc

$$(x - 1) + 3y + 2(z - 2) = 0,$$

soit

$$\boxed{x + 3y + 2z - 5 = 0.}$$

9.3 Exercice 3

En remplaçant les coordonnées paramétriques dans l'équation du plan, on obtient

$$2(1 + t) - (2 - t) + 3t - 1 = 0,$$

donc

$$7t - 1 = 0, \qquad t = \frac{1}{7}.$$

L'intersection est le point

$$\boxed{\left(\frac{8}{7}, \frac{13}{7}, \frac{3}{7}\right).}$$

9.4 Exercice 4

Les vecteurs directeurs des deux droites ne sont pas colinéaires. Pour une intersection, il faudrait résoudre

$$1 + t = 2 + s, \qquad 2t = 1 + s, \qquad 1 - t = s.$$

Les deux dernières équations donnent $s = 2t - 1$ et $s = 1 - t$, donc $t = \frac{2}{3}$ et $s = \frac{1}{3}$. La première équation n'est alors pas satisfaite. Les droites sont donc gauches.

9.5 Exercice 5

Les vecteurs normaux $(1,1,1)$ et $(2,-1,1)$ ne sont pas colinéaires : les plans sont sécants.
En posant $z = t$, le système donne

$$x + y = 3 - t, \qquad 2x - y = 1 - t.$$

On en déduit

$$x = \frac{4-2t}{3}, \qquad y = \frac{5-t}{3}, \qquad z = t.$$

Une représentation paramétrique de l'intersection est donc

$$\boxed{\begin{cases} x = \dfrac{4}{3} - \dfrac{2}{3}t, \\ y = \dfrac{5}{3} - \dfrac{1}{3}t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.}$$

9.6 Exercice 6

Le plan a pour équation

$$2(x-1) - (y-2) + 3z = 0,$$

soit

$$\boxed{2x - y + 3z = 0.}$$

La projection orthogonale de l'origine est située sur la droite de direction $(2,-1,3)$ passant par l'origine. Elle s'écrit $H = \lambda(2,-1,3)$. En substituant dans l'équation du plan, on obtient

$$4\lambda + \lambda + 9\lambda = 0,$$

donc $\lambda = 0$. Ainsi $H = O$.

9.7 Exercice 7

Le plan (ABC) a pour équation

$$x + y + z = 1.$$

Le point $D(1,1,1)$ ne vérifie pas cette équation. Les quatre points ne sont donc pas coplanaires.

9.8 Exercice 8

Le produit scalaire du vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et du vecteur normal à $\mathcal{P}_m$ vaut

$$(1,-1,1) \cdot (1,m,1) = 2 - m.$$

Si $m \neq 2$, la droite coupe le plan en un point unique. Si $m = 2$, la droite est parallèle au plan ou contenue dans celui-ci.

Pour $m = 2$, l'équation du plan est $x + 2y + z = 1$. Sur la droite, le membre de gauche vaut

$$1 + t + 2(2 - t) + t = 5,$$

indépendamment de t. La droite n'est donc pas contenue dans le plan : elle lui est strictement parallèle.

9.9 Exercice 9

Le plan (ABC) a pour équation

$$x + y + z = 1.$$

Les plans (OAB) et (OAC) ont respectivement pour équations

$$z = 0, \qquad y = 0.$$

Les plans (OAB) et (OAC) se coupent suivant (OA). La distance de O au plan (ABC) vaut

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}.}$$

Elle représente la hauteur issue de O dans ce tétraèdre.

10 Questions possibles à l'oral

1. Quelle différence existe-t-il entre une représentation paramétrique et une équation cartésienne ?
2. Pourquoi deux droites non parallèles de l'espace peuvent-elles ne pas se couper ?
3. Comment construire un vecteur normal à un plan défini par trois points ?
4. Pourquoi deux plans sécants se coupent-ils suivant une droite ?
5. Comment interpréter le rang d'un système linéaire associé à une intersection ?
6. Quel est le rôle du produit scalaire dans les problèmes d'orthogonalité ?
7. Comment relier une démonstration géométrique à sa traduction analytique ?
8. Quelles erreurs peuvent survenir lors de la résolution d'un système paramétrique ?

11 Conclusion

Les droites et les plans constituent les objets fondamentaux de la géométrie affine de l'espace. Leur étude s'appuie sur les vecteurs, les équations paramétriques et les équations cartésiennes.

La traduction des propriétés géométriques en systèmes linéaires permet de déterminer les positions relatives et les intersections. Le produit scalaire et le vecteur normal complètent ces outils en apportant une caractérisation efficace de l'orthogonalité et des distances.

Dans une présentation orale, il est important d'articuler les résultats théoriques, les démonstrations, les exemples calculés et les exercices, tout en précisant les hypothèses nécessaires à chaque caractérisation.

Références

[1] M. Audin, *Géométrie*, EDP Sciences, collection Sciences Sup.

[2] J.-M. Monier, *Géométrie MPSI*, Dunod. Ouvrage de référence pour les espaces affines, les vecteurs, les applications linéaires et les équations de droites et de plans.

[3] M. Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, CEDIC / Fernand Nathan. Référence pour les fondements de la géométrie et les propriétés d'incidence.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter les programmes en vigueur et leurs annexes sur : https://www.education.gouv.fr/.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES de mathématiques : programmes, rapports de jury et sujets des sessions récentes*. Les rapports de jury permettent de vérifier les attentes méthodologiques et le niveau de détail attendu à l'oral. Portail officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.