Leçon d'oral de CAPES

Droites remarquables du triangle

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**
- 1.1 Prérequis . . . 1
- 1.2 Objectifs . . . 1

2 Introduction et problématique **1**

3 Les médiatrices et le centre du cercle circonscrit **2**
- 3.1 Définition . . . 2
- 3.2 Concourance des médiatrices . . . 2
- 3.3 Position du centre du cercle circonscrit . . . 2

4 Les médianes et le centre de gravité **2**
- 4.1 Définition . . . 2
- 4.2 Concourance des médianes . . . 3
- 4.3 Interprétation . . . 3

5 Les hauteurs et l'orthocentre **3**
- 5.1 Définition . . . 3
- 5.2 Concourance des hauteurs . . . 4
- 5.3 Position de l'orthocentre . . . 4

6 Les bissectrices et le centre du cercle inscrit **4**
- 6.1 Définition . . . 4
- 6.2 Concourance des bissectrices . . . 5
- 6.3 Rayon du cercle inscrit . . . 5

7 Synthèse comparative **5**
- 7.1 Cas du triangle équilatéral . . . 6

8 Ouvertures et prolongements **6**
- 8.1 La droite d'Euler . . . 6
- 8.2 Le cercle des neuf points . . . 6

9 Exercices **6**

10 Pistes pour la présentation orale **8**

11 Références bibliographiques et institutionnelles **9**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose connues les notions suivantes :

— les éléments caractéristiques d'un triangle : sommets, côtés, angles et notation ;

— les propriétés des droites parallèles et perpendiculaires ;

— la médiatrice d'un segment et la bissectrice d'un angle ;

— les propriétés élémentaires des triangles, notamment les cas d'égalité des triangles ;

— les propriétés du cercle circonscrit et les notions de distance à un point et à une droite ;

— les outils de démonstration géométrique et, selon les exercices, le calcul vectoriel ou les coordonnées dans un repère.

1.2 Objectifs

L'objectif principal est d'identifier les quatre familles de droites remarquables d'un triangle et de comprendre les propriétés géométriques qui expliquent leur rôle.

À l'issue de la leçon, on doit pouvoir :

— définir les médianes, les hauteurs, les médiatrices des côtés et les bissectrices ;

— démontrer que les trois droites d'une même famille sont concourantes ;

— caractériser les points de concours et connaître leurs propriétés ;

— distinguer les cas du triangle aigu, rectangle et obtusangle ;

— mobiliser ces propriétés dans des constructions, des démonstrations et des problèmes ;

— articuler les approches synthétique, vectorielle et analytique lorsque cela est pertinent.

2 Introduction et problématique

Les droites remarquables d'un triangle permettent de mettre en évidence des points privilégiés de la figure. Elles sont définies à partir des côtés, des sommets et des angles, mais leurs propriétés dépassent souvent la simple construction.

Les quatre familles étudiées sont :

1. les médiatrices des côtés ;
2. les médianes ;
3. les hauteurs ;
4. les bissectrices des angles.

Une question centrale est la suivante :

> Pourquoi les trois droites d'une même famille sont-elles concourantes, et quelles propriétés possède leur point de concours ?

On notera le triangle ABC, avec $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ lorsque les longueurs des côtés seront utilisées.

3 Les médiatrices et le centre du cercle circonscrit

3.1 Définition

Définition 1. *La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.*

Propriété 1. *Un point M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si*

$$MA = MB.$$

3.2 Concourance des médiatrices

Théorème 1. *Les trois médiatrices d'un triangle non dégénéré sont concourantes en un point O. Ce point est le centre du cercle circonscrit au triangle.*

Démonstration. Soient d_1 et d_2 les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. Elles ne sont pas parallèles : si elles l'étaient, les droites (AB) et (AC), respectivement perpendiculaires à d_1 et d_2, seraient parallèles, ce qui contredirait le fait que A, B et C ne sont pas alignés.

Elles se coupent donc en un point O. Puisque O appartient aux deux médiatrices, on a

$$OA = OB \qquad \text{et} \qquad OA = OC.$$

Ainsi $OB = OC$, donc O appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$. Les trois médiatrices sont concourantes.

De plus,

$$OA = OB = OC.$$

Le cercle de centre O et de rayon OA passe donc par les trois sommets : c'est le cercle circonscrit. □

3.3 Position du centre du cercle circonscrit

La position de O dépend de la nature du triangle :

— si le triangle est aigu, O est à l'intérieur du triangle ;

— si le triangle est rectangle en A, O est le milieu de l'hypoténuse $[BC]$;

— si le triangle est obtusangle, O est à l'extérieur du triangle.

Remarque 1. Dans un triangle rectangle en A, le cercle circonscrit a pour diamètre $[BC]$. En effet, son centre est le milieu de l'hypoténuse et son rayon vaut $BC/2$.

4 Les médianes et le centre de gravité

4.1 Définition

Définition 2. *Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.*

On note I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Les médianes sont alors (AI), (BJ) et (CK).

4.2 Concourance des médianes

Théorème 2. *Les trois médianes d'un triangle sont concourantes en un point G, appelé centre de gravité du triangle. Le point G appartient à chacune des médianes et vérifie*

$$AG = \frac{2}{3}AI, \qquad BG = \frac{2}{3}BJ, \qquad CG = \frac{2}{3}CK.$$

Démonstration. On choisit un repère affine et l'on note $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les vecteurs-position des points A, B et C.

Le milieu I de $[BC]$ vérifie

$$\vec{i} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}.$$

Considérons le point G défini par

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}.$$

Alors

$$\vec{g} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{i} - \vec{a}).$$

Il en résulte que G appartient à la médiane (AI) et que

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

Par permutation des sommets, on obtient de même

$$\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BJ}, \qquad \overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CK}.$$

Le point G appartient donc aux trois médianes. □

4.3 Interprétation

Le centre de gravité est le barycentre des trois sommets affectés de coefficients égaux :

$$G = \mathrm{bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}.$$

Pour une plaque triangulaire homogène, il correspond au centre de masse. Cette interprétation physique peut servir de motivation, mais elle ne remplace pas la démonstration géométrique.

Remarque 2. La propriété des deux tiers permet de construire G à partir d'une seule médiane. Elle constitue également un outil efficace pour résoudre des problèmes de géométrie affine.

5 Les hauteurs et l'orthocentre

5.1 Définition

Définition 3. *Une hauteur d'un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire à la droite portant le côté opposé.*

Les trois hauteurs sont les droites passant par A, B et C et respectivement perpendiculaires à (BC), (CA) et (AB).

5.2 Concourance des hauteurs

Théorème 3. *Les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes. Leur point de concours est appelé orthocentre et noté H.*

Démonstration. Soit H l'intersection des hauteurs issues de A et de B. Ces deux hauteurs ne sont pas parallèles, car elles sont respectivement perpendiculaires à (BC) et (AC), qui ne sont pas parallèles.

On a donc

$$AH \perp BC, \qquad BH \perp AC.$$

Considérons les droites (AB) et (CH).

Les angles orientés vérifient, modulo π,

$$\measuredangle(AB, AH) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(AB, BC)$$

et

$$\measuredangle(BH, BC) = \frac{\pi}{2} - \measuredangle(AC, BC).$$

Une manière équivalente de conclure, sans dépendre des orientations choisies, consiste à considérer le quadrilatère $ABHC$: les angles en A et en B sont droits, puisque $AH \perp BC$ et $BH \perp AC$.

Les points A, B, H, C ne sont toutefois pas dans l'ordre cyclique de ce quadrilatère lorsque H est extérieur au triangle.

Pour une démonstration plus directe, on utilise des coordonnées. Plaçons

$$A = (0,0), \qquad B = (c,0), \qquad C = (u,v), \quad v \neq 0.$$

La hauteur issue de C est la droite verticale $x = u$ si l'on raisonne avec le repère adapté à l'orientation du côté AB ? Non : cette affirmation n'est valable que lorsque AC est horizontal. Il convient donc d'utiliser le calcul vectoriel général.

Posons

$$\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{o},$$

où O est un point auxiliaire choisi comme origine. Une preuve classique consiste à utiliser le cercle circonscrit : la droite passant par A et parallèle à (BC), celle passant par B et parallèle à (CA), et celle passant par C et parallèle à (AB) forment un triangle auxiliaire. Les hauteurs du triangle initial sont les médiatrices des côtés correspondants du triangle auxiliaire, ce qui établit leur concourance à partir de celle des médiatrices. □

5.3 Position de l'orthocentre

— Dans un triangle aigu, l'orthocentre est intérieur au triangle.

— Dans un triangle rectangle, l'orthocentre est le sommet de l'angle droit.

— Dans un triangle obtusangle, l'orthocentre est extérieur au triangle.

Remarque 3. Les hauteurs sont des droites, et non nécessairement des segments contenus dans le triangle. Dans un triangle obtusangle, certaines hauteurs rencontrent les droites portant les côtés à l'extérieur du triangle.

6 Les bissectrices et le centre du cercle inscrit

6.1 Définition

Définition 4. *La bissectrice d'un angle est la demi-droite issue de son sommet qui partage cet angle en deux angles de même mesure. La droite support de cette demi-droite est également appelée bissectrice.*

Propriété 2. *Un point intérieur à un angle appartient à sa bissectrice si et seulement s'il est équidistant des deux côtés de l'angle.*

La distance d'un point à une droite désigne la longueur du segment perpendiculaire reliant le point à cette droite.

6.2 Concourance des bissectrices

Théorème 4. *Les trois bissectrices intérieures d'un triangle sont concourantes en un point I, appelé centre du cercle inscrit.*

Démonstration. Les bissectrices intérieures des angles A et B se coupent en un point I situé à l'intérieur du triangle.

Comme I appartient à la bissectrice de l'angle A, il est équidistant des droites (AB) et (AC). De même, puisqu'il appartient à la bissectrice de l'angle B, il est équidistant des droites (BA) et (BC).

Ainsi, la distance de I à (AC) est égale à sa distance à (BC). Le point I appartient donc à la bissectrice intérieure de l'angle C.

Les trois bissectrices sont concourantes. Le cercle de centre I dont le rayon est la distance de I à l'un des côtés est tangent aux trois côtés : c'est le cercle inscrit. □

6.3 Rayon du cercle inscrit

Si r désigne le rayon du cercle inscrit et S l'aire du triangle, alors

$$S = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr.$$

En notant $p = (a+b+c)/2$ le demi-périmètre, on obtient

$$S = pr, \qquad \boxed{r = \frac{S}{p}}.$$

Cette relation relie une construction géométrique à une formule métrique simple.

7 Synthèse comparative

Droites	**Définition**	**Point de concours**	**Propriété caractéristique**
Médiatrices	Perpendiculaires aux côtés en leurs milieux	Centre du cercle circonscrit O	$OA = OB = OC$
Médianes	Joignent un sommet au milieu du côté opposé	Centre de gravité G	Le centre de gravité partage chaque médiane dans le rapport 2 : 1 à partir du sommet
Hauteurs	Passent par un sommet et sont perpendiculaires au côté opposé	Orthocentre H	Défini par les relations de perpendicularité
Bissectrices intérieures	Partagent les angles en deux angles égaux	Centre du cercle inscrit I	Équidistance aux trois côtés

7.1 Cas du triangle équilatéral

Dans un triangle équilatéral, les quatre familles de droites remarquables sont confondues deux à deux pour chaque sommet : chaque médiane est aussi une hauteur, une médiatrice du côté opposé et une bissectrice de l'angle au sommet.

Les quatre centres O, G, H et I sont alors confondus.

Dans un triangle quelconque, ces centres ne sont généralement pas confondus.

8 Ouvertures et prolongements

8.1 La droite d'Euler

Théorème 5 (Droite d'Euler)**.** *Dans un triangle non équilatéral, le centre du cercle circonscrit O, le centre de gravité G et l'orthocentre H sont alignés. De plus,*

$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

Démonstration. On choisit le centre du cercle circonscrit comme origine du repère vectoriel. On note encore $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ les vecteurs-position des sommets.

Puisque $OA = OB = OC$, les trois vecteurs ont même norme. L'orthocentre H vérifie

$$\vec{h} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}.$$

En effet,

$$(\vec{h} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = (\vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{b}) = \|\vec{c}\|^2 - \|\vec{b}\|^2 = 0.$$

Ainsi AH est perpendiculaire à BC. Les relations analogues montrent que BH et CH sont également des hauteurs.

Le centre de gravité vérifie

$$\vec{g} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} = \frac{\vec{h}}{3}.$$

Par conséquent, O, G et H sont alignés et $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$. □

Remarque 4. Dans un triangle équilatéral, les points O, G et H sont confondus : la droite d'Euler n'est alors pas déterminée de manière unique.

8.2 Le cercle des neuf points

Une autre ouverture est le cercle des neuf points, qui passe notamment par les milieux des trois côtés et par les pieds des trois hauteurs. Son centre est le milieu du segment $[OH]$.

Cette propriété illustre les liens entre les hauteurs, le cercle circonscrit et les milieux des côtés.

9 Exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés dans un ordre progressif, depuis les constructions jusqu'aux démonstrations plus élaborées.

Exercice 1 – Constructions géométriques

Construire un triangle ABC quelconque, puis tracer :

a) ses trois médiatrices ;

b) ses trois médianes ;

c) ses trois hauteurs ;

d) ses trois bissectrices intérieures.

Identifier les points de concours et vérifier expérimentalement leurs propriétés à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

Compétences : construction, observation, formulation de conjectures.

Exercice 2 – Triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A.

a) Démontrer que le milieu de $[BC]$ est le centre du cercle circonscrit.

b) Déterminer l'orthocentre.

c) Étudier la position des médianes et calculer le rapport dans lequel le centre de gravité partage chacune d'elles.

Compétences : mobilisation des propriétés métriques et des théorèmes de concours.

Exercice 3 – Centre de gravité

Soit ABC un triangle, I le milieu de $[BC]$ et G le centre de gravité.

a) Démontrer que
$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$$

b) En déduire que $AG : GI = 2 : 1$.

c) Soit M le milieu de $[AG]$. Exprimer $\overrightarrow{MG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$.

Compétences : calcul vectoriel et géométrie affine.

Exercice 4 – Bissectrices et cercle inscrit

On considère un triangle ABC d'aire S et de côtés a, b et c.

a) Démontrer que les bissectrices intérieures sont concourantes.

b) Justifier que leur point de concours est le centre du cercle inscrit.

c) Démontrer la formule
$$r = \frac{S}{p}, \qquad p = \frac{a+b+c}{2}.$$

d) Calculer r lorsque le triangle est équilatéral de côté ℓ.

Compétences : distance à une droite, aire et calcul littéral.

Exercice 5 – Hauteurs et coordonnées

Dans un repère orthonormé, on donne
$$A(0,0), \qquad B(6,0), \qquad C(2,4).$$

a) Déterminer une équation de la hauteur issue de C.

b) Déterminer une équation de la hauteur issue de A.

c) Calculer les coordonnées de l'orthocentre.

d) Vérifier que ce point appartient à la troisième hauteur.

Compétences : équations de droites et perpendicularité dans le plan.

Exercice 6 – Droite d'Euler

Soit ABC un triangle non équilatéral, de centre du cercle circonscrit O, de centre de gravité G et d'orthocentre H.

a) En prenant O comme origine, montrer que
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

b) En déduire la relation
$$\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}.$$

c) Expliquer pourquoi la droite d'Euler n'est pas déterminée de façon unique dans le cas équilatéral.

Compétences : vecteurs, perpendicularité et géométrie du cercle.

Exercice 7 – Triangle isocèle

Soit ABC un triangle isocèle en A, avec $AB = AC$.

a) Démontrer que la médiane issue de A est aussi une hauteur.

b) Démontrer qu'elle est également la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$.

c) Identifier les axes de symétrie du triangle et préciser les conséquences sur les centres remarquables.

Compétences : cas d'égalité des triangles et symétries.

Exercice 8 – Recherche et démonstration

Soit ABC un triangle quelconque. On note I, J et K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

Étudier les relations entre les médianes du triangle ABC et les médianes du triangle IJK.

Formuler une conjecture concernant leurs points de concours, puis la démontrer à l'aide de vecteurs.

Compétences : recherche, expérimentation, conjecture et démonstration.

10 Pistes pour la présentation orale

Une présentation orale peut suivre le déroulement suivant :

1. introduire les quatre familles à partir d'une figure dynamique ;
2. présenter les définitions et les propriétés métriques ;
3. démontrer la concourance des médiatrices et des médianes ;
4. établir la concourance des hauteurs et des bissectrices ;
5. comparer les quatre centres et examiner les cas particuliers ;
6. terminer par la droite d'Euler et proposer un exercice d'application.

Il est important de distinguer une observation expérimentale d'une démonstration. Un logiciel de géométrie dynamique peut aider à conjecturer les propriétés, mais il ne suffit pas à établir leur validité dans tous les cas.

Les démonstrations doivent également prendre en compte les triangles rectangles, obtusangles et équilatéraux, afin d'éviter de tirer des conclusions d'une seule figure particulière.

11 Références bibliographiques et institutionnelles

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres I et IV. Texte fondateur pour les constructions géométriques, les propriétés des triangles et les cercles.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, CEDIC / Fernand Nathan. Référence générale pour les méthodes de géométrie euclidienne et les propriétés des figures.

[3] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967. Ouvrage de problèmes et de résultats de géométrie plane, notamment sur les centres remarquables.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée général et technologique*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes en vigueur sont consultables sur : `https://www.education.gouv.fr/`.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*. Éduscol : `https://eduscol.education.fr/`.

[6] GeoGebra, *Logiciel de géométrie dynamique*. Outil d'expérimentation et de visualisation des constructions : `https://www.geogebra.org/`.