Leçon d'oral du CAPES de mathématiques
Le cercle

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Définition et premières propriétés **2**

3 Le cercle comme lieu géométrique **2**

3.1 La médiatrice d'un segment 2

3.2 Applications aux triangles 3

4 Angles au centre et angles inscrits **3**

5 Tangente à un cercle **4**

6 Longueur et aire **4**

7 Le cercle en géométrie analytique **4**

7.1 Équation cartésienne 4

7.2 Déterminer un cercle passant par trois points 5

7.3 Intersection d'une droite et d'un cercle 5

8 Exemples de problèmes **5**

9 Liste d'exercices **6**

10 Éléments de correction et prolongements **8**

11 Conclusion **8**

12 Références bibliographiques et institutionnelles **9**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Les élèves doivent connaître les notions de distance, de segment, de médiatrice, d'angle, de perpendicularité et de parallélisme. Ils doivent savoir utiliser le théorème de Pythagore, calculer les coordonnées d'un milieu et la distance entre deux points dans un repère orthonormé. Selon le niveau étudié, la trigonométrie dans le triangle rectangle et les équations de droites peuvent également être mobilisées.

Objectifs. Cette leçon vise à définir le cercle comme lieu géométrique, à établir ses principales propriétés et à montrer comment il intervient dans les configurations du triangle, les angles inscrits, les polygones réguliers et la géométrie analytique. On cherchera à articuler plusieurs points de vue : construction géométrique, raisonnement synthétique, calcul de distances et équations cartésiennes. Les applications permettront de résoudre des problèmes de construction, de démonstration et de détermination d'un lieu.

2 Définition et premières propriétés

Définition 1. *Soit O un point du plan et soit $r > 0$. Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M du plan tels que*

$$OM = r.$$

On le note généralement $\mathcal{C}(O, r)$.

Le disque fermé de centre O et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $OM \leq r$. Le disque ouvert correspond à l'inégalité $OM < r$.

Il faut distinguer le cercle, qui est une ligne, du disque, qui est une région du plan.

Propriété 1. *Le cercle $\mathcal{C}(O, r)$ est invariant par toute rotation de centre O. Il est également invariant par toute réflexion d'axe passant par O.*

Ces invariances traduisent la symétrie du cercle. Elles expliquent notamment pourquoi tous les diamètres ont la même longueur et pourquoi les cordes peuvent être étudiées à l'aide des médiatrices.

Définition 2. *Une corde d'un cercle est un segment dont les extrémités appartiennent au cercle. Un diamètre est une corde passant par le centre. Un arc est une portion du cercle délimitée par deux points.*

Propriété 2. *Le diamètre d'un cercle de rayon r mesure $2r$. Toute corde est de longueur inférieure ou égale au diamètre, avec égalité si et seulement si elle est un diamètre.*

Justification. Si A et B sont sur le cercle, alors

$$AB \leq AO + OB = 2r.$$

L'égalité dans l'inégalité triangulaire a lieu lorsque A, O, B sont alignés et que O appartient au segment $[AB]$.

3 Le cercle comme lieu géométrique

3.1 La médiatrice d'un segment

Propriété 3. *La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M du plan tels que $MA = MB$.*

Cette caractérisation permet de construire le centre d'un cercle circonscrit à un triangle.

Théorème 1. *Par trois points non alignés A, B et C passe un unique cercle. Son centre est l'intersection des médiatrices de $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.*

Démonstration. Si O est le centre du cercle circonscrit, alors $OA = OB = OC$. Le point O appartient donc aux médiatrices des trois côtés. Les médiatrices de deux côtés non parallèles se coupent en un point unique, ce qui détermine le centre.

Remarque 1. *Trois points distincts alignés ne déterminent pas de cercle : une droite ne peut rencontrer un cercle en plus de deux points.*

3.2 Applications aux triangles

Définition 3. *Le cercle circonscrit à un triangle ABC est le cercle passant par les trois sommets A, B et C. Son centre est appelé circoncentre.*

Le circoncentre est :

- à l'intérieur du triangle si celui-ci est aigu ;
- au milieu de l'hypoténuse si le triangle est rectangle ;
- à l'extérieur du triangle si celui-ci est obtusangle.

Théorème 2 (Théorème de Thalès, forme du cercle)**.** *Si A, B et C appartiennent à un cercle et si $[AB]$ est un diamètre, alors le triangle ABC est rectangle en C. Réciproquement, le cercle circonscrit à un triangle rectangle a pour diamètre son hypoténuse.*

Interprétation. Un angle inscrit qui intercepte un diamètre est droit. Cette propriété donne une méthode de construction d'un angle droit à l'aide d'un cercle.

4 Angles au centre et angles inscrits

Définition 4. *Un angle au centre est un angle dont le sommet est le centre du cercle. Un angle inscrit est un angle dont le sommet appartient au cercle et dont les côtés coupent le cercle.*

Théorème 3. *Dans un même cercle, un angle inscrit mesure la moitié de l'angle au centre qui intercepte le même arc, lorsque les mesures sont prises pour l'arc considéré.*

Si A, B et C appartiennent à un cercle de centre O, et si les angles interceptent le même arc AB, alors

$$\widehat{ACB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}.$$

Propriété 4. *Deux angles inscrits qui interceptent le même arc ont la même mesure. En particulier, deux angles inscrits qui interceptent un même diamètre sont droits.*

Propriété 5. *Si A, B, C et D sont sur un même cercle, alors les angles opposés du quadrilatère cyclique sont supplémentaires :*

$$\widehat{A} + \widehat{C} = 180^\circ, \qquad \widehat{B} + \widehat{D} = 180^\circ.$$

Application. Pour démontrer que quatre points sont cocycliques, on peut établir que deux angles qui interceptent une même corde sont égaux, ou que deux angles opposés d'un quadrilatère sont supplémentaires.

5 Tangente à un cercle

Définition 5. *Une tangente à un cercle est une droite qui possède un unique point commun avec ce cercle.*

Théorème 4. *La tangente au cercle $\mathcal{C}(O, r)$ en un point A est perpendiculaire au rayon $[OA]$.*

Réciproquement, toute droite passant par A et perpendiculaire à (OA) est tangente au cercle en A.

Démonstration. La distance du centre O à la tangente est égale au rayon. La perpendiculaire issue de O à la tangente rencontre celle-ci en A ; le triangle formé par le centre, le point de tangence et le pied de la perpendiculaire montre que le rayon est perpendiculaire à la tangente.

Propriété 6. *Depuis un point extérieur P, les deux tangentes au cercle, lorsqu'elles existent, ont des segments tangents de même longueur. Si T_1 et T_2 sont les points de tangence, alors*

$$PT_1 = PT_2.$$

Cette propriété se démontre par congruence des triangles rectangles OPT_1 et OPT_2.

6 Longueur et aire

Propriété 7. *La longueur L d'un cercle de rayon r et l'aire A du disque correspondant sont données par*

$$L = 2\pi r = \pi d, \qquad A = \pi r^2,$$

où $d = 2r$ désigne le diamètre.

Pour un arc de cercle correspondant à un angle au centre θ exprimé en radians, la longueur de l'arc est

$$\ell = r\theta.$$

L'aire du secteur circulaire correspondant est

$$A_{\text{secteur}} = \frac{1}{2} r^2 \theta.$$

Si l'angle est exprimé en degrés, la longueur de l'arc vaut

$$\ell = \frac{\alpha}{360^\circ} 2\pi r,$$

et l'aire du secteur vaut

$$A_{\text{secteur}} = \frac{\alpha}{360^\circ} \pi r^2.$$

Remarque 2. *Il convient de distinguer la longueur du cercle de l'aire du disque. Le nombre π est le rapport constant entre la longueur d'un cercle et son diamètre.*

7 Le cercle en géométrie analytique

7.1 Équation cartésienne

Dans un repère orthonormé, soient $O(a, b)$ et $r > 0$. Un point $M(x, y)$ appartient au cercle de centre O et de rayon r si et seulement si $OM = r$. Par la formule de distance,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Propriété 8. *L'équation d'un cercle de centre $O(a,b)$ et de rayon r est*

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2.}$$

En développant, on obtient une équation de la forme

$$x^2+y^2+ux+vy+w=0.$$

Le centre a alors pour coordonnées

$$\left(-\frac{u}{2},-\frac{v}{2}\right),$$

et le rayon vérifie

$$r^2=\frac{u^2+v^2}{4}-w.$$

L'équation représente un cercle réel non réduit à un point si $r^2>0$. Si $r^2=0$, elle représente un point ; si $r^2<0$, elle ne possède aucun point réel.

Exemple 1. *Le cercle d'équation*

$$x^2+y^2-4x+2y-4=0$$

s'écrit, après complétion des carrés,

$$(x-2)^2+(y+1)^2=9.$$

Son centre est $O(2,-1)$ et son rayon vaut 3.

7.2 Déterminer un cercle passant par trois points

Pour déterminer le cercle passant par trois points non alignés, on peut :

1. chercher son centre comme intersection de deux médiatrices ;
2. utiliser une équation générale $x^2+y^2+ux+vy+w=0$;
3. remplacer (x,y) par les coordonnées des trois points afin d'obtenir un système linéaire en u, v et w.

7.3 Intersection d'une droite et d'un cercle

Le nombre de points d'intersection d'une droite et d'un cercle dépend de la distance d du centre à la droite :

$d>r$	aucun point d'intersection
$d=r$	un point : la droite est tangente
$d<r$	deux points d'intersection

Cette caractérisation permet de déterminer les positions relatives d'une droite et d'un cercle par le calcul.

8 Exemples de problèmes

Exemple 2 (Cercle circonscrit à un triangle rectangle)**.** *Soit ABC un triangle rectangle en A. Le milieu O de l'hypoténuse $[BC]$ vérifie*

$$OA=OB=OC=\frac{BC}{2}.$$

Le cercle circonscrit à ABC a donc pour centre le milieu de l'hypoténuse et pour rayon $BC/2$.

Exemple 3 (Lieu géométrique)**.** *Soit A un point fixe et $r > 0$. L'ensemble des points M tels que $MA = r$ est le cercle de centre A et de rayon r. L'ensemble des points M tels que $MA \leq r$ est le disque fermé correspondant.*

Exemple 4 (Recherche d'une tangente)**.** *Pour déterminer la tangente au cercle*

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$$

au point $A(4,6)$, on vérifie que A appartient au cercle :

$$(4-1)^2 + (6-2)^2 = 9 + 16 = 25.$$

Le vecteur $\overrightarrow{OA} = (3,4)$ est un vecteur normal à la tangente. Son équation est donc

$$3(x-4) + 4(y-6) = 0,$$

soit

$$3x + 4y - 36 = 0.$$

9 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés dans une progression allant de la construction géométrique à la résolution analytique. Ils permettent également d'interroger les choix de méthode et les raisonnements attendus selon le niveau des élèves.

Exercice 1 – Médiatrices et cercle circonscrit

Soit ABC un triangle dont les côtés mesurent $AB = 5$, $AC = 6$ et $BC = 7$.

a) Construire le triangle et les médiatrices de ses côtés.
b) Construire le centre O du cercle circonscrit.
c) Justifier que $OA = OB = OC$.
d) Expliquer pourquoi deux médiatrices suffisent.

Piste de résolution. Le centre est l'intersection des médiatrices de deux côtés. L'égalité des distances découle de la caractérisation de la médiatrice.

Exercice 2 – Cercle de diamètre donné

Soient A et B deux points distincts et M un point du cercle de diamètre $[AB]$.

a) Démontrer que le triangle AMB est rectangle en M.
b) Réciproquement, montrer que tout point M tel que $\widehat{AMB} = 90^\circ$ appartient à ce cercle.
c) Décrire les deux positions possibles de M par rapport à la droite (AB).

Piste de résolution. Utiliser le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle, puis la réciproque du théorème de Thalès.

Exercice 3 – Angles inscrits

Les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle. On suppose que $\widehat{AOB} = 110°$, où O est le centre.

a) Déterminer l'angle inscrit qui intercepte le même arc AB.
b) Déterminer l'angle opposé dans un quadrilatère cyclique, en précisant les arcs considérés.
c) Expliquer pourquoi il faut préciser l'arc intercepté lorsqu'on utilise les angles au centre.

Piste de résolution. L'angle inscrit correspondant au même arc mesure $55°$. Les angles opposés d'un quadrilatère inscrit sont supplémentaires.

Exercice 4 – Équation d'un cercle

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(1, 2)$, $B(5, 2)$ et $C(1, 6)$.

a) Déterminer la nature du triangle ABC.
b) Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit.
c) Écrire une équation cartésienne de ce cercle.
d) Vérifier que les trois points satisfont l'équation obtenue.

Piste de résolution. Le triangle est rectangle en A. Le centre est le milieu de $[BC]$, soit $(3, 4)$, et le rayon vaut $2\sqrt{2}$. L'équation est

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 8.$$

Exercice 5 – Tangente à un cercle

On considère le cercle

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$$

et le point $A(5, 5)$.

a) Vérifier que A appartient au cercle.
b) Déterminer un vecteur normal à la tangente en A.
c) Établir l'équation de cette tangente.
d) Vérifier que le rayon et la tangente sont perpendiculaires.

Piste de résolution. Le centre est $O(2, 1)$ et $\overrightarrow{OA} = (3, 4)$. L'équation de la tangente est

$$3(x - 5) + 4(y - 5) = 0,$$

soit $3x + 4y - 35 = 0$.

Exercice 6 – Intersection d'une droite et d'un cercle

Étudier le nombre de points d'intersection du cercle

$$x^2 + y^2 = 9$$

avec chacune des droites suivantes :

$$y = 4, \qquad y = 3, \qquad y = 2.$$

Déterminer les points d'intersection dans chaque cas.

Piste de résolution. Le rayon est 3 et la distance du centre à la droite $y = k$ est $|k|$. Pour $y = 4$, il n'y a aucune intersection ; pour $y = 3$, il y a un point de tangence $(0, 3)$; pour $y = 2$, les points sont $(\sqrt{5}, 2)$ et $(-\sqrt{5}, 2)$.

Exercice 7 – Lieu géométrique et triangle

Soit $[AB]$ un segment de longueur 6 et M un point tel que $MA = MB$.

a) Décrire le lieu des points M.
b) Ajouter la condition $MA = 3$ et déterminer les points qui satisfont simultanément les deux conditions.
c) Interpréter géométriquement les solutions.

Piste de résolution. La première condition définit la médiatrice de $[AB]$. La seconde définit le cercle de centre A et de rayon 3. Leur intersection est constituée des deux points situés sur la médiatrice à distance 3 de A.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC}.$$

a) Sous quelles conditions sur les angles peut-on conclure que les quatre points sont cocycliques ?
b) Démontrer le résultat en utilisant la réciproque d'une propriété des quadrilatères inscrits.
c) Proposer une seconde démonstration faisant intervenir les angles inscrits.

Piste de résolution. Si les angles considérés interceptent la même corde AC et sont situés dans des configurations compatibles avec la convexité, leur égalité permet d'établir la cocyclicité. Il convient de préciser les angles et les arcs utilisés.

10 Éléments de correction et prolongements

Les exercices précédents peuvent être prolongés de plusieurs façons :

— utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour conjecturer des propriétés d'angles et de tangentes ;
— comparer une démonstration synthétique et une démonstration analytique d'un même résultat ;
— étudier les cercles inscrits et les bissectrices d'un triangle ;
— rechercher les conditions d'existence d'un cercle passant par trois points ;
— étudier les polygones réguliers inscrits dans un cercle ;
— résoudre des problèmes de distance minimale et de lieux géométriques.

Pour un oral du CAPES, il est pertinent de présenter au moins une démonstration complète, par exemple le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle ou la caractérisation de la tangente. Il faut également savoir expliquer les conditions d'application des théorèmes et distinguer une propriété directe de sa réciproque.

11 Conclusion

Le cercle est à la fois un objet géométrique fondamental, un lieu géométrique et une courbe dont l'équation se prête aux calculs. Son étude relie les distances, les médiatrices, les angles, les triangles, les tangentes et la géométrie analytique.

L'intérêt didactique de ce thème tient à la complémentarité des méthodes : construction à la règle et au compas, raisonnement synthétique, calcul de distances, équations cartésiennes et exploration par géométrie dynamique.

12 Références bibliographiques et institutionnelles

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres III et IV. Texte fondateur pour l'étude des cercles, des angles et des polygones inscrits.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, CEDIC / Nathan. Ouvrage de référence pour les propriétés géométriques et les raisonnements de géométrie euclidienne.

[3] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, The Mathematical Association of America, 1967. Ouvrage consacré à des résultats classiques de géométrie, notamment aux configurations de cercles et de triangles.

[4] Daniel Perrin, *Cours d'algèbre et de géométrie*, Ellipses. Référence complémentaire pour la géométrie et les raisonnements mathématiques.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*, versions en vigueur. Consulter les programmes officiels et les ressources d'accompagnement sur le site Éduscol : `https://eduscol.education.fr/`.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports du jury du CAPES externe de mathématiques*. Ils permettent de préciser les attentes de l'épreuve orale, les exigences de démonstration et les liens entre contenu mathématique et enseignement. Site officiel : `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/`.