Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Solides de l'espace

Table des matières

1 Introduction et problématique **1**

2 Prérequis et objectifs **1**
- 2.1 Prérequis . . . 1
- 2.2 Objectifs . . . 1

3 Classification des solides **2**
- 3.1 Polyèdres . . . 2
- 3.2 Solides à surface courbe . . . 2
- 3.3 Vocabulaire géométrique . . . 2

4 Les solides usuels **2**
- 4.1 Le pavé droit et le cube . . . 2
- 4.2 Le prisme droit . . . 3
- 4.3 La pyramide . . . 3
- 4.4 Le cylindre de révolution . . . 4
- 4.5 Le cône de révolution . . . 4
- 4.6 La boule et la sphère . . . 4

5 Tableau récapitulatif **5**

6 Justification des formules de volume **5**
- 6.1 Principe de Cavalieri . . . 5
- 6.2 Volume d'une pyramide . . . 5
- 6.3 Volume du cône . . . 6

7 Représentation des solides **6**
- 7.1 Perspective cavalière . . . 6
- 7.2 Patrons . . . 6
- 7.3 Outils numériques . . . 6

8 Aires, volumes et unités **7**
- 8.1 Unités . . . 7
- 8.2 Homothétie et changement d'échelle . . . 7

9 Applications et modélisation **7**
- 9.1 Choix du modèle . . . 7
- 9.2 Exemple : réservoir cylindrique . . . 7

10 Difficultés et points de vigilance **8**

11 Proposition de déroulement pédagogique **8**

12 Liste d'exercices **8**

13 Éléments de correction **11**

14 Conclusion **13**

1 Introduction et problématique

La géométrie dans l'espace permet de modéliser de nombreux objets physiques, architecturaux et techniques. Les solides interviennent dans le calcul de volumes, l'estimation de capacités, la détermination de quantités de matériaux et la représentation d'objets en trois dimensions.

L'étude des solides articule plusieurs registres : la géométrie plane, la géométrie dans l'espace, les grandeurs et mesures, les représentations graphiques et la modélisation.

On peut organiser cette leçon autour de la problématique suivante :

> Comment décrire, représenter et caractériser un solide de l'espace, puis calculer son aire et son volume à partir de ses dimensions et de sa structure géométrique ?

L'enjeu didactique est de faire comprendre la différence entre un objet tridimensionnel, sa représentation plane et les grandeurs qui lui sont associées.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les connaissances nécessaires comprennent :

— les figures planes usuelles : triangle, rectangle, carré, parallélogramme, disque et polygones réguliers ;

— les notions de longueur, d'aire et de volume, ainsi que les unités associées ;

— les formules d'aire des figures planes usuelles ;

— le théorème de Pythagore et les relations trigonométriques dans le triangle rectangle ;

— les notions de perpendicularité, de parallélisme et d'orthogonalité ;

— la proportionnalité et les changements d'unités ;

— les représentations en perspective cavalière et les patrons de solides simples.

2.2 Objectifs

À l'issue de la séquence, l'élève ou le candidat doit pouvoir :

— reconnaître et nommer les principaux solides ;

— identifier leurs faces, arêtes, sommets, bases et hauteurs ;

— distinguer un solide, son patron et sa représentation plane ;

— calculer des aires latérales, des aires totales et des volumes ;

— justifier les formules de volume par décomposition, comparaison ou raisonnement géométrique ;

— résoudre des problèmes concrets faisant intervenir des solides ;

— effectuer des conversions d'unités et contrôler la cohérence d'un résultat ;

— mobiliser un logiciel de géométrie dynamique ou un outil de représentation tridimensionnelle.

3 Classification des solides

3.1 Polyèdres

Un polyèdre est un solide dont la surface est constituée d'un nombre fini de polygones plans appelés faces.

On distingue notamment :

— les prismes droits ;

— les pyramides ;

— les polyèdres réguliers, dont les faces sont des polygones réguliers identiques et dont la configuration est la même à chaque sommet.

Les principaux polyèdres réguliers convexes sont le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre.

3.2 Solides à surface courbe

Les solides usuels à surface courbe comprennent :

— le cylindre de révolution ;

— le cône de révolution ;

— la boule et la sphère.

Il convient de distinguer la sphère, qui est une surface, de la boule, qui est le solide délimité par cette surface.

3.3 Vocabulaire géométrique

Pour un polyèdre, on appelle :

— **face** : polygone constituant une partie de sa surface ;

— **arête** : segment commun à deux faces ;

— **sommet** : point d'intersection de plusieurs arêtes ;

— **base** : face distinguée dans la description du solide ;

— **hauteur** : distance entre les plans des bases pour un prisme, ou distance d'un sommet au plan de base pour une pyramide.

La hauteur est une distance perpendiculaire : elle ne doit pas être confondue avec une arête oblique.

4 Les solides usuels

4.1 Le pavé droit et le cube

Un pavé droit possède six faces rectangulaires. Ses trois dimensions sont notées L, ℓ et h.
Son volume est :

$$V = L\ell h.$$

Son aire totale est :

$$S = 2(L\ell + Lh + \ell h).$$

Le cube est un pavé droit dont les arêtes ont toutes la même longueur a. Ainsi :

$$V = a^3, \qquad S = 6a^2.$$

La diagonale d'un pavé droit de dimensions L, ℓ et h a pour longueur :

$$d = \sqrt{L^2 + \ell^2 + h^2}.$$

Cette relation découle de deux applications successives du théorème de Pythagore.

4.2 Le prisme droit

Un prisme droit possède deux bases polygonales parallèles et superposables. Ses faces latérales sont des rectangles.

Si B désigne l'aire d'une base, P son périmètre et h la hauteur du prisme, alors :

$$\boxed{V = Bh}$$

et

$$\boxed{S_{\text{lat}} = Ph}.$$

L'aire totale est :

$$S_{\text{tot}} = 2B + Ph.$$

La formule du volume s'interprète en considérant le solide comme un empilement de sections identiques à la base.

4.3 La pyramide

Une pyramide possède une base polygonale et des faces latérales triangulaires qui se rejoignent en un sommet.

Si B est l'aire de la base et h la hauteur, alors :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}Bh}.$$

L'aire totale est la somme de l'aire de la base et des aires des faces latérales :

$$S_{\text{tot}} = B + S_{\text{lat}}.$$

Pour une pyramide régulière, les faces latérales sont des triangles isocèles congruents. La hauteur d'une face latérale est appelée apothème de la pyramide.

Lorsque le périmètre de la base vaut P et que l'apothème vaut a, on obtient :

$$S_{\text{lat}} = \frac{Pa}{2}.$$

Cette dernière formule ne s'applique directement que lorsque les faces latérales ont une même hauteur, comme dans une pyramide régulière.

4.4 Le cylindre de révolution

Un cylindre de révolution de rayon r et de hauteur h possède deux bases circulaires de même rayon.

Son volume est :

$$\boxed{V = \pi r^2 h}.$$

Son aire latérale est :

$$S_{\text{lat}} = 2\pi r h.$$

Son aire totale est :

$$S_{\text{tot}} = 2\pi r^2 + 2\pi r h.$$

Le patron de sa surface latérale est un rectangle de dimensions $2\pi r$ et h. Cette observation permet de justifier la formule de l'aire latérale.

4.5 Le cône de révolution

Un cône de révolution de rayon de base r et de hauteur h possède une base circulaire et un sommet.

Son volume est :

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi r^2 h}.$$

Si g désigne la génératrice, l'aire latérale est :

$$S_{\text{lat}} = \pi r g.$$

L'aire totale est :

$$S_{\text{tot}} = \pi r^2 + \pi r g.$$

Dans le cas d'un cône droit, le théorème de Pythagore donne :

$$g^2 = r^2 + h^2.$$

Il faut distinguer la hauteur h, perpendiculaire au plan de la base, de la génératrice g, qui appartient à la surface latérale.

4.6 La boule et la sphère

La sphère de centre O et de rayon R est l'ensemble des points de l'espace situés à la distance R de O.

La boule de centre O et de rayon R est l'ensemble des points situés à une distance inférieure ou égale à R de O.

L'aire de la sphère est :

$$\boxed{S = 4\pi R^2}.$$

Le volume de la boule est :

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Ces formules peuvent être établies par des méthodes de géométrie intégrale ou, dans un cadre adapté, par des comparaisons de volumes.

5 Tableau récapitulatif

On note B l'aire de la base, P son périmètre, h la hauteur et r le rayon.

Solide	**Volume**	**Aire totale**
Cube d'arête a	a^3	$6a^2$
Pavé droit	$L\ell h$	$2(L\ell + Lh + \ell h)$
Prisme droit	Bh	$2B + Ph$
Pyramide	$\dfrac{Bh}{3}$	$B + S_{\text{lat}}$
Cylindre	$\pi r^2 h$	$2\pi r^2 + 2\pi r h$
Cône	$\dfrac{\pi r^2 h}{3}$	$\pi r^2 + \pi r g$
Boule	$\dfrac{4}{3}\pi R^3$	–
Sphère	–	$4\pi R^2$

Pour un prisme droit, P est le périmètre de la base. Pour le cône, g désigne la génératrice. L'aire totale d'une boule n'est pas une grandeur de surface distincte de celle de sa frontière : cette surface est la sphère.

6 Justification des formules de volume

6.1 Principe de Cavalieri

Le principe de Cavalieri affirme que deux solides compris entre deux plans parallèles ont le même volume si leurs sections par tout plan parallèle à ces deux plans ont la même aire.

Ce principe permet notamment de comprendre pourquoi le volume d'un prisme est égal au produit de l'aire de sa base par sa hauteur.

Il intervient également dans la démonstration de la formule du volume d'une pyramide, en comparant des sections parallèles à la base et en tenant compte de la réduction des longueurs.

6.2 Volume d'une pyramide

Considérons une pyramide de hauteur h et d'aire de base B. Une section parallèle à la base, située à une distance x du sommet, est une réduction de la base de rapport x/h.

Son aire est donc :

$$A(x) = B\left(\frac{x}{h}\right)^2.$$

Par intégration, le volume vaut :

$$V = \int_0^h B\frac{x^2}{h^2}\,dx = \frac{B}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{Bh}{3}.$$

Cette démonstration suppose que le calcul intégral est connu. Dans un cadre scolaire, on peut aussi présenter la formule à l'aide d'une décomposition ou d'une comparaison de solides.

6.3 Volume du cône

Un cône et une pyramide partagent la même relation entre le volume, l'aire de la base et la hauteur :

$$V = \frac{1}{3}Bh.$$

Pour un cône de révolution, l'aire de la base est πr^2, d'où :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Cette formule peut être justifiée par le calcul intégral ou par une méthode de comparaison de volumes.

7 Représentation des solides

7.1 Perspective cavalière

La perspective cavalière permet de représenter sur une feuille un objet tridimensionnel. Les propriétés suivantes sont conservées :

— le parallélisme des droites ;

— l'alignement des points ;

— les rapports de longueurs sur une même droite parallèle au plan frontal, selon les conventions retenues.

En revanche, les longueurs et les angles ne sont pas nécessairement conservés dans toutes les directions. Un cercle peut notamment être représenté par une ellipse.

Les arêtes cachées sont généralement tracées en pointillés.

7.2 Patrons

Un patron est une représentation plane permettant, après découpage et pliage, de reconstituer la surface d'un solide.

Il est utile pour :

— visualiser les faces d'un polyèdre ;

— déterminer une aire totale ;

— comprendre la surface latérale d'un cylindre ou d'un cône ;

— vérifier la possibilité de construire un solide à partir d'une figure plane.

Un patron doit être géométriquement cohérent : les faces doivent se rejoindre sans chevauchement incompatible avec le solide visé.

7.3 Outils numériques

Un logiciel de géométrie dynamique en trois dimensions permet de construire des solides, de modifier leurs dimensions, de visualiser des sections et de comparer des représentations.

Il peut être utilisé pour confronter une conjecture à une construction, sans se substituer à une démonstration.

8 Aires, volumes et unités

8.1 Unités

Les aires s'expriment en unités carrées :

$$\mathrm{mm}^2, \quad \mathrm{cm}^2, \quad \mathrm{dm}^2, \quad \mathrm{m}^2.$$

Les volumes s'expriment en unités cubiques :

$$\mathrm{mm}^3, \quad \mathrm{cm}^3, \quad \mathrm{dm}^3, \quad \mathrm{m}^3.$$

On rappelle :

$$1\,\mathrm{dm}^3 = 1\,\mathrm{L}, \qquad 1\,\mathrm{cm}^3 = 1\,\mathrm{mL},$$

et

$$1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{L}.$$

Lorsqu'une longueur est multipliée par 10, une aire correspondante est multipliée par 10^2 et un volume par 10^3.

8.2 Homothétie et changement d'échelle

Si toutes les longueurs d'un solide sont multipliées par un facteur $k > 0$, alors :

$$\text{longueurs} : k, \qquad \text{aires} : k^2, \qquad \text{volumes} : k^3.$$

Cette propriété est importante pour interpréter des maquettes, des plans et des modèles réduits.

Par exemple, si une maquette est réalisée à l'échelle 1/10, son volume est égal au millième du volume de l'objet réel.

9 Applications et modélisation

9.1 Choix du modèle

La résolution d'un problème concret nécessite de choisir un modèle géométrique adapté. Un emballage peut être assimilé à un pavé droit, un silo à un cylindre, un toit à un prisme ou une pyramide, et une balle à une boule.

Cette modélisation suppose de préciser les hypothèses retenues : épaisseur des parois négligée, dimensions idéalisées, absence de pertes de matière ou approximation d'une forme réelle.

9.2 Exemple : réservoir cylindrique

Un réservoir cylindrique vertical possède un rayon intérieur $r = 0{,}60\,\text{m}$ et une hauteur intérieure $h = 1{,}50\,\text{m}$.

Son volume est :

$$V = \pi r^2 h = \pi \times 0{,}60^2 \times 1{,}50 = 0{,}54\pi\,\text{m}^3.$$

Ainsi :

$$V \approx 1{,}696\,\text{m}^3 \approx 1696\,\text{L}.$$

Ce calcul donne une capacité théorique. La capacité réellement utilisable peut être inférieure si le réservoir n'est pas rempli jusqu'au bord.

10 Difficultés et points de vigilance

Les difficultés fréquentes sont les suivantes :

— confondre aire latérale et aire totale ;

— confondre hauteur et longueur d'une arête oblique ;

— utiliser un rayon à la place d'un diamètre ;

— confondre sphère et boule ;

— mélanger des unités incompatibles dans une formule ;

— croire que les longueurs visibles sur une perspective cavalière sont toujours les longueurs réelles ;

— appliquer une formule sans vérifier que le solide possède la structure géométrique requise ;

— oublier qu'une aire s'exprime en unités carrées et qu'un volume s'exprime en unités cubiques.

Une démarche efficace consiste à identifier le solide, à réaliser un schéma annoté, à convertir les dimensions dans une unité commune, à choisir la formule adaptée, puis à vérifier l'ordre de grandeur du résultat.

11 Proposition de déroulement pédagogique

Une séquence possible peut comporter quatre étapes.

1. **Observer et classer.** Faire identifier des solides à partir d'objets usuels, puis caractériser leurs faces, leurs arêtes et leurs bases.
2. **Représenter et construire.** Utiliser des patrons et des perspectives cavalières pour relier les objets tridimensionnels à leurs représentations planes.
3. **Calculer et justifier.** Introduire les formules d'aires et de volumes, puis en justifier certaines par décomposition, comparaison ou intégration selon le niveau des élèves.

4. **Résoudre un problème.** Traiter une situation de modélisation en explicitant les hypothèses, les unités et l'interprétation du résultat.

L'évaluation peut porter sur la reconnaissance des solides, le choix des formules, la qualité des schémas, la rigueur des calculs et la capacité à justifier les résultats.

12 Liste d'exercices

Exercice 1 – Pavé droit

Un pavé droit a pour dimensions 8 cm, 5 cm et 3 cm.

1. Calculer son volume.
2. Calculer son aire totale.
3. Calculer la longueur de sa grande diagonale.
4. Vérifier l'homogénéité des unités utilisées.

Exercice 2 – Prisme droit

La base d'un prisme droit est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et 8 cm. La hauteur du prisme est de 12 cm.

1. Calculer l'aire de la base.
2. Déterminer le volume du prisme.
3. Calculer le périmètre de la base.
4. En déduire l'aire latérale et l'aire totale.

Exercice 3 – Pyramide à base carrée

Une pyramide régulière a une base carrée de côté $a = 10$ cm et une hauteur de 12 cm.

1. Calculer son volume.
2. Déterminer la hauteur d'une face latérale.
3. Calculer son aire latérale et son aire totale.
4. Expliquer pourquoi la hauteur de la pyramide et la hauteur d'une face latérale sont différentes.

Exercice 4 – Cylindre

Un cylindre de révolution a un rayon de base de 4 cm et une hauteur de 15 cm.

1. Calculer son volume exact, puis une valeur approchée.
2. Calculer son aire latérale.
3. Calculer son aire totale.
4. Décrire et représenter son patron.

Exercice 5 – Cône de révolution

Un cône de révolution a un rayon de base de 5 cm et une hauteur de 12 cm.

1. Calculer la longueur de la génératrice.
2. Calculer le volume du cône.

3. Calculer son aire latérale et son aire totale.
4. Expliquer le rôle du théorème de Pythagore dans cette situation.

Exercice 6 – Boule et sphère

Une boule a un rayon de 6 cm.

1. Calculer le volume de la boule.
2. Calculer l'aire de sa surface.
3. Si le rayon double, par quel facteur le volume est-il multiplié ? Et l'aire ?
4. Interpréter ces résultats à l'aide des lois de changement d'échelle.

Exercice 7 – Réservoir et conversions

Un réservoir est assimilé à un cylindre de rayon intérieur 0,75 m et de hauteur 2 m.

1. Calculer sa capacité en mètres cubes.
2. Convertir cette capacité en litres.
3. Le réservoir contient initialement 1500 litres d'eau. Quelle fraction de sa capacité est utilisée ?
4. Préciser les hypothèses nécessaires à la validité du modèle.

Exercice 8 – Solide composé

Un solide est constitué d'un cylindre de rayon 3 cm et de hauteur 10 cm surmonté d'un cône de même rayon et de hauteur 4 cm.

1. Calculer le volume du cylindre.
2. Calculer le volume du cône.
3. En déduire le volume total du solide.
4. Déterminer l'aire extérieure du solide, en précisant les surfaces qui ne sont pas visibles de l'extérieur.

Exercice 9 – Réduction et agrandissement

Un solide est agrandi de sorte que toutes ses dimensions linéaires sont multipliées par 1,5.

1. Déterminer le facteur de multiplication des aires.
2. Déterminer le facteur de multiplication des volumes.
3. Un objet initial a un volume de $200\,\text{cm}^3$. Calculer le volume de l'objet agrandi.
4. Expliquer pourquoi le volume n'est pas multiplié par 1,5.

Exercice 10 – Section plane

On considère un cône de révolution de hauteur H et de rayon de base R. On réalise une section par un plan parallèle à la base, à une distance x du sommet, avec $0 < x < H$.

1. Déterminer le rayon $r(x)$ de la section.
2. Calculer l'aire de cette section.
3. Comparer cette aire à celle de la base.
4. En déduire une expression du volume du cône par intégration.

Exercice 11 – Patrons et optimisation

On souhaite fabriquer une boîte fermée en forme de pavé droit, de volume fixé V_0.

1. Exprimer la hauteur h en fonction des dimensions L, ℓ et du volume V_0.
2. Écrire l'aire totale de la boîte.
3. Dans le cas où la boîte est un cube, exprimer l'arête en fonction de V_0.
4. Discuter, dans le cadre d'un modèle adapté, la question de la minimisation de la quantité de matériau.

Exercice 12 – Démonstration et esprit critique

Un élève affirme : « Si deux solides ont la même hauteur et la même aire de base, ils ont toujours le même volume. »

1. Cette affirmation est-elle vraie pour deux prismes droits ?
2. Est-elle vraie pour deux pyramides ?
3. Quel principe permet de généraliser certaines comparaisons de volumes ?
4. Formuler précisément les hypothèses nécessaires à l'utilisation du principe de Cavalieri.

13 Éléments de correction

Exercice 1

$$V = 8 \times 5 \times 3 = 120\,\text{cm}^3.$$

$$S = 2(8 \times 5 + 8 \times 3 + 5 \times 3) = 158\,\text{cm}^2.$$

$$d = \sqrt{8^2 + 5^2 + 3^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Exercice 2

L'aire de la base est :

$$B = \frac{6 \times 8}{2} = 24\,\text{cm}^2.$$

Le volume est :

$$V = 24 \times 12 = 288\,\text{cm}^3.$$

L'hypoténuse de la base mesure 10 cm, donc $P = 6 + 8 + 10 = 24\,\text{cm}$. Ainsi :

$$S_{\text{lat}} = 24 \times 12 = 288\,\text{cm}^2,$$

$$S_{\text{tot}} = 2 \times 24 + 288 = 336\,\text{cm}^2.$$

Exercice 3

L'aire de la base vaut $100\,\text{cm}^2$, d'où :

$$V = \frac{100 \times 12}{3} = 400\,\text{cm}^3.$$

La distance du centre de la base à un sommet du carré vaut $5\sqrt{2}\,\text{cm}$. L'apothème est donc :

$$a = \sqrt{12^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{194}\,\text{cm}.$$

L'aire latérale est :

$$S_{\text{lat}} = \frac{40\sqrt{194}}{2} = 20\sqrt{194}\,\text{cm}^2.$$

L'aire totale est :

$$S_{\text{tot}} = 100 + 20\sqrt{194}\,\text{cm}^2.$$

Exercice 4

$$V = \pi \times 4^2 \times 15 = 240\pi\,\text{cm}^3.$$
$$S_{\text{lat}} = 2\pi \times 4 \times 15 = 120\pi\,\text{cm}^2.$$
$$S_{\text{tot}} = 2\pi \times 4^2 + 120\pi = 152\pi\,\text{cm}^2.$$

Exercice 5

$$g = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13\,\text{cm}.$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \times 25 \times 12 = 100\pi\,\text{cm}^3.$$
$$S_{\text{lat}} = 65\pi\,\text{cm}^2, \qquad S_{\text{tot}} = 90\pi\,\text{cm}^2.$$

Exercice 6

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 6^3 = 288\pi\,\text{cm}^3, \qquad S = 4\pi \times 6^2 = 144\pi\,\text{cm}^2.$$

Si le rayon double, l'aire est multipliée par 4 et le volume par 8.

Exercice 7

$$V = \pi \times 0{,}75^2 \times 2 = 1{,}125\pi\,\text{m}^3.$$

La capacité vaut environ 3 534 L. La fraction utilisée est :

$$\frac{1500}{1125\pi} = \frac{4}{3\pi} \approx 0{,}424.$$

Le réservoir contient donc environ 42,4 % de sa capacité.

Exercice 8

$$V_{\text{cyl}} = \pi \times 3^2 \times 10 = 90\pi\,\text{cm}^3,$$
$$V_{\text{cône}} = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi\,\text{cm}^3.$$

Le volume total est $102\pi\,\text{cm}^3$. L'aire extérieure comprend la surface latérale du cylindre, la surface latérale du cône et le disque inférieur. Le disque commun aux deux solides n'est pas extérieur. La génératrice du cône vaut $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$; ainsi :

$$S_{\text{ext}} = 2\pi \times 3 \times 10 + \pi \times 3 \times 5 + \pi \times 3^2 = 84\pi\,\text{cm}^2.$$

Exercice 9

Les aires sont multipliées par :

$$1{,}5^2 = 2{,}25.$$

Les volumes sont multipliés par :

$$1{,}5^3 = 3{,}375.$$

Le volume agrandi vaut donc :

$$200 \times 3{,}375 = 675\,\mathrm{cm}^3.$$

Exercice 10

Par similitude :

$$r(x) = \frac{R}{H}x.$$

L'aire de la section est :

$$A(x) = \pi R^2 \frac{x^2}{H^2}.$$

Par intégration :

$$V = \int_0^H A(x)\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^2\,dx = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

Exercice 11

Le volume donne :

$$h = \frac{V_0}{L\ell}.$$

L'aire totale est :

$$S = 2\left(L\ell + \frac{V_0}{L} + \frac{V_0}{\ell}\right).$$

Dans le cas d'un cube, l'arête vaut $\sqrt[3]{V_0}$ et l'aire totale est $6V_0^{2/3}$. La recherche d'un minimum dans le cas général nécessite de préciser les contraintes imposées aux dimensions et le modèle de fabrication.

Exercice 12

Pour deux prismes de même hauteur et de même aire de base, la formule $V = Bh$ donne le même volume. Il en est de même pour deux pyramides, puisque $V = Bh/3$.

Le principe de Cavalieri s'applique lorsque les sections des deux solides par tout plan parallèle à un plan de référence ont la même aire, les solides étant compris entre deux plans parallèles.

14 Conclusion

L'étude des solides de l'espace mobilise conjointement la géométrie, les grandeurs et mesures, la représentation et la modélisation. Les formules d'aires et de volumes ne doivent pas être envisagées comme un simple catalogue : elles prennent leur sens à travers la structure géométrique des solides, les patrons, les sections et les raisonnements qui permettent de les justifier.

Dans la préparation de l'oral du CAPES, il est important de mettre en évidence la progressivité des apprentissages, les difficultés des élèves, les liens entre géométrie plane et géométrie spatiale, ainsi que les possibilités d'expérimentation et de démonstration.

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres XI à XIII, consacrés à la géométrie dans l'espace. Éditions et traductions diverses.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes consacrés à la géométrie élémentaire et à la géométrie dans l'espace, CEDIC / Fernand Nathan, selon les éditions.

[3] Collection de manuels de mathématiques du collège, *Géométrie dans l'espace : solides, volumes et sections*. Hachette Éducation, éditions correspondant aux programmes en vigueur.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques au collège*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/

[6] GeoGebra, *Logiciel de géométrie dynamique et de géométrie 3D*. https://www.geogebra.org/

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*. Les rapports permettent d'identifier les attentes relatives à l'exposé, à la rigueur mathématique et à la didactique. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/