Le barycentre

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**

2 Introduction et motivation **1**

3 Définition du barycentre **1**

4 Propriétés fondamentales **2**
- 4.1 Homogénéité des coefficients . . . 2
- 4.2 Milieu d'un segment . . . 2
- 4.3 Coordonnées du barycentre . . . 3
- 4.4 Associativité du barycentre . . . 3
- 4.5 Réduction d'une somme vectorielle . . . 3

5 Applications géométriques **3**
- 5.1 Centre de gravité d'un triangle . . . 3
- 5.2 Lieu géométrique défini par une relation vectorielle . . . 4
- 5.3 Application à la géométrie analytique . . . 4

6 Exemple de résolution au tableau **4**

7 Limites et points de vigilance **5**

8 Liste d'exercices **5**

9 Conclusion **7**

10 Références bibliographiques et institutionnelles **7**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose maîtrisés les opérations sur les vecteurs, la relation de Chasles, les combinaisons linéaires de vecteurs, les coordonnées dans un repère, ainsi que les propriétés élémentaires des triangles. Des connaissances sur les fonctions affines et les produits scalaires peuvent être mobilisées pour certaines applications. Il est également utile de savoir résoudre un système linéaire et de manipuler des sommes finies.

Objectifs. L'objectif principal est d'introduire le barycentre comme un outil de calcul vectoriel et de résolution de problèmes géométriques. Il s'agit de savoir établir l'existence et l'unicité d'un barycentre lorsque la somme des coefficients est non nulle, de maîtriser la réduction des sommes vectorielles, d'utiliser l'associativité du barycentre et d'étudier les ensembles de points définis par des relations vectorielles. On cherchera également à mettre en évidence les liens entre barycentre, centre de gravité, coordonnées et géométrie du triangle.

2 Introduction et motivation

Le barycentre généralise plusieurs notions classiques de géométrie : milieu d'un segment, centre de gravité d'un triangle et moyenne pondérée de points. Il permet de remplacer certaines sommes de vecteurs par un unique vecteur et de ramener des problèmes comportant plusieurs points à des calculs plus simples.

En mécanique, le barycentre correspond au centre de masse d'un système de points matériels lorsque les coefficients représentent des masses positives. En géométrie affine, les coefficients peuvent être réels, y compris négatifs, ce qui étend largement les applications de la notion.

3 Définition du barycentre

Définition 1. *Soient $A_1, \dots, A_n$ des points d'un espace affine associé à un espace vectoriel E, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels tels que*

$$S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0.$$

Le barycentre du système pondéré

$$((A_1, \lambda_1), \dots, (A_n, \lambda_n))$$

est l'unique point G vérifiant

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.}$$

La condition $S \neq 0$ garantit l'existence et l'unicité du barycentre.

Théorème 1 (Existence et unicité)**.** *Pour tout point O de l'espace affine, le barycentre G est caractérisé par*

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.}$$

Cette expression ne dépend pas du choix de O.

Démonstration. Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i}.$$

La relation définissant le barycentre devient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \left(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OA_i} \right) = \overrightarrow{0},$$

soit

$$S\overrightarrow{GO} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{0}.$$

Puisque $S \neq 0$, on obtient

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Cette formule détermine un unique point G.

Remarque 1. *Si la somme des coefficients est nulle, la définition précédente ne garantit pas l'existence d'un barycentre. Selon les points et les coefficients, l'équation vectorielle peut être impossible ou vérifiée par tous les points. On ne parle donc pas, dans ce cadre, de barycentre lorsque $S = 0$.*

4 Propriétés fondamentales

4.1 Homogénéité des coefficients

Propriété 1. *Multiplier tous les coefficients par un même réel non nul ne modifie pas le barycentre.*

En effet, si G est le barycentre des (A_i, λ_i), alors, pour $\mu \neq 0$,

$$\sum_{i=1}^{n} \mu\lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \mu \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}.$$

On peut donc normaliser les coefficients en les divisant par leur somme lorsque celle-ci est non nulle.

4.2 Milieu d'un segment

Exemple 1. *Soient A et B deux points. Le barycentre de $((A,1),(B,1))$ est le milieu I de $[AB]$, car*

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}.$$

Plus généralement, si G est le barycentre de $((A,a),(B,b))$, avec $a+b \neq 0$, alors

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$

Cette formule montre que, lorsque a et b sont positifs, G appartient au segment $[AB]$. Si les coefficients sont de signes opposés, le point peut se situer à l'extérieur du segment, à condition que leur somme ne soit pas nulle.

4.3 Coordonnées du barycentre

Dans un repère affine, si $A_i(x_i, y_i)$ et $S \neq 0$, alors

$$\boxed{x_G = \frac{\sum_i \lambda_i x_i}{S}, \qquad y_G = \frac{\sum_i \lambda_i y_i}{S}.}$$

Dans l'espace, on ajoute de même

$$z_G = \frac{\sum_i \lambda_i z_i}{S}.$$

Cette expression permet de calculer le barycentre par les coordonnées, mais elle ne remplace pas l'intérêt de la formulation vectorielle dans les démonstrations géométriques.

4.4 Associativité du barycentre

Propriété 2 (Regroupement)**.** *Soient G_1 le barycentre de $(A_1, \lambda_1), \ldots, (A_p, \lambda_p)$, avec*

$$S_1 = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \neq 0.$$

Le système correspondant peut être remplacé par le point G_1 affecté du coefficient S_1 :

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = S_1 \overrightarrow{MG_1}.$$

On peut donc regrouper plusieurs points en leur barycentre, à condition de respecter les conditions de non-annulation des sommes de coefficients nécessaires aux regroupements.

Démonstration. On écrit
$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG_1} + \overrightarrow{G_1A_i}.$$
Ainsi,
$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = S_1 \overrightarrow{MG_1} + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{G_1A_i}.$$
Le dernier terme est nul par définition de G_1, d'où la formule annoncée.

4.5 Réduction d'une somme vectorielle

Propriété 3. *Si G est le barycentre de (A_i, λ_i) et $S = \sum_i \lambda_i \neq 0$, alors, pour tout point M,*
$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = S\overrightarrow{MG}.}$$

Cette propriété est l'un des outils les plus utiles de la leçon. Elle permet de transformer une somme de vecteurs dépendant de plusieurs points en un seul vecteur.

5 Applications géométriques

5.1 Centre de gravité d'un triangle

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité, c'est-à-dire le barycentre de $(A,1),(B,1),(C,1)$. Alors
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Si I est le milieu de $[BC]$, on a
$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right),$$
donc
$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.}$$
Le point G appartient ainsi à la médiane issue de A et se situe aux deux tiers de cette médiane en partant de A. Par permutation des sommets, on retrouve les deux autres médianes. Elles sont donc concourantes en G.

5.2 Lieu géométrique défini par une relation vectorielle

Soient A et B deux points et a, b deux réels tels que $a + b \neq 0$. Si G est le barycentre de $((A,a),(B,b))$, alors
$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}.$$
Par conséquent, une relation du type
$$\left\| a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} \right\| = k, \qquad k \geq 0,$$
équivaut à
$$MG = \frac{k}{|a+b|}.$$
L'ensemble recherché est donc un cercle de centre G et de rayon $k/|a+b|$ dans le plan, ou une sphère dans l'espace.

5.3 Application à la géométrie analytique

Le barycentre permet de calculer les coordonnées de points définis par des rapports de longueurs, de démontrer des alignements et de traiter des problèmes de concours.

Par exemple, dans un triangle ABC, si D est le barycentre de $(B,2)$ et $(C,1)$, alors

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}.$$

Les coordonnées de D sont donc les moyennes pondérées de celles de B et de C. Comme les coefficients sont positifs, D appartient au segment $[BC]$ et vérifie

$$\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}.$$

6 Exemple de résolution au tableau

Énoncé. Soient A, B, C trois points non alignés. On définit G par

$$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Montrer que G est le barycentre du système pondéré $(A,1),(B,2),(C,3)$, puis exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Solution. La somme des coefficients vaut $1+2+3=6\neq 0$. La définition assure l'existence et l'unicité de G. En prenant A comme origine, on obtient

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB}\,2 + \overrightarrow{AC}\,3\right).$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.}$$

On peut aussi regrouper B et C : leur barycentre H, associé aux coefficients 2 et 3, vérifie

$$\overrightarrow{AH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}.$$

Le point G est ensuite le barycentre de $(A,1)$ et $(H,5)$. Cette seconde méthode illustre l'associativité.

7 Limites et points de vigilance

— Vérifier systématiquement que la somme des coefficients est non nulle avant de définir un barycentre.

— Ne pas confondre barycentre et centre de gravité : le centre de gravité d'un triangle est un cas particulier de barycentre à coefficients égaux.

— Un coefficient négatif est autorisé en géométrie affine, mais les interprétations en termes de masses positives ne s'appliquent alors plus directement.

— Dans une réduction vectorielle, respecter le sens des vecteurs et la relation de Chasles.

— Pour un regroupement, vérifier les sommes de coefficients des sous-systèmes avant de calculer leurs barycentres.

— Ne pas conclure qu'un barycentre à coefficients quelconques appartient à l'enveloppe convexe des points : cette propriété est garantie lorsque les coefficients sont tous positifs et leur somme est non nulle.

8 Liste d'exercices

Exercice 1 – Milieu et rapport de longueurs

Soient A et B deux points distincts et a, b deux réels tels que $a+b \neq 0$. On note G le barycentre de $(A, a), (B, b)$.

1. Établir la relation
$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}.$$
2. Étudier la position de G lorsque $a, b > 0$.
3. Déterminer la position de G pour $a = 2$, $b = -1$.
4. Interpréter le cas $a = b = 1$.

Exercice 2 – Centre de gravité

Soit ABC un triangle et G son centre de gravité.

1. Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Soit I le milieu de $[BC]$. Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
3. En déduire que les trois médianes du triangle sont concourantes.

Exercice 3 – Calcul de coordonnées

Dans un repère du plan, on donne $A(1, 2)$, $B(4, -1)$ et $C(-2, 3)$.

1. Calculer les coordonnées du barycentre G de $(A, 2), (B, 1), (C, 3)$.
2. Vérifier le résultat à l'aide de la relation vectorielle définissant le barycentre.
3. Déterminer si G appartient au triangle ABC. Justifier la réponse.

Exercice 4 – Associativité

Soient A, B, C, D quatre points. On définit H comme le barycentre de $(A, 1), (B, 2)$ et K comme celui de $(C, 1), (D, 3)$.

1. Déterminer les sommes de coefficients associées à H et à K.
2. Montrer que le barycentre de $(A, 1), (B, 2), (C, 1), (D, 3)$ est aussi le barycentre de $(H, 3), (K, 4)$.
3. Expliquer l'intérêt géométrique de ce regroupement.

Exercice 5 – Lieu géométrique

Soient A et B deux points distincts du plan. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant
$$\left\| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \right\| = 5.$$
On précisera le centre et le rayon de l'ensemble.

Exercice 6 – Alignement

Soient A, B, C trois points non alignés. On définit
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}.$$
Montrer que G est un point du segment $[BC]$ et déterminer le rapport BG/GC.

Exercice 7 – Coefficients négatifs

Soient A et B deux points distincts. On considère le barycentre G de $(A, 3), (B, -1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AG}$.
2. Déterminer la position de G sur la droite (AB).
3. Expliquer pourquoi G n'appartient pas au segment $[AB]$.

Exercice 8 – Barycentre et produit scalaire

Soient $A_1, \dots, A_n$ des points du plan, munis de coefficients réels λ_i tels que $S = \sum_i \lambda_i \neq 0$. On note G leur barycentre.

1. Établir, pour tout point M,
$$\sum_i \lambda_i \overrightarrow{MA_i} = S\overrightarrow{MG}.$$
2. Dans le cas où tous les coefficients sont positifs, étudier la fonction
$$F(M) = \sum_i \lambda_i MA_i^2.$$
3. Montrer que F atteint son minimum en G et établir l'identité
$$\sum_i \lambda_i MA_i^2 = \sum_i \lambda_i GA_i^2 + S\,MG^2.$$

9 Conclusion

Le barycentre est un outil central de la géométrie affine. Sa définition vectorielle fournit un cadre unificateur pour le milieu, le centre de gravité et les moyennes pondérées. Ses propriétés de réduction et d'associativité facilitent les calculs et permettent de résoudre des problèmes de lieux, d'alignement et de concours. La maîtrise de la somme des coefficients, de la formule vectorielle et des conditions de regroupement est essentielle à une utilisation rigoureuse.

10 Références bibliographiques et institutionnelles

1. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, notamment les programmes de seconde, première et terminale. Les programmes et textes en vigueur sont accessibles sur `https://www.education.gouv.fr/`.
2. Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports des jurys du CAPES externe de mathématiques*. Consulter les rapports correspondant à la session préparée sur le site officiel `https://www.devenirenseignant.gouv.fr/`.
3. Daniel Perrin, *Cours d'algèbre et de géométrie*, éditions scientifiques disponibles selon les bibliothèques universitaires. Référence utile pour replacer les méthodes vectorielles dans le cadre de la géométrie affine.
4. Michèle Audin, *Géométrie*, ouvrage de référence pour approfondir les notions de géométrie affine et leurs applications.
5. Ressources pédagogiques et programmes officiels disponibles sur Éduscol : `https://eduscol.education.fr/`.

Remarque bibliographique. Les références institutionnelles sont à consulter dans leur version en vigueur. Les ouvrages de Perrin et d'Audin sont proposés comme pistes d'approfondissement ; les éditions et les chapitres précis sont à vérifier selon l'édition utilisée. Les exercices de cette leçon sont rédigés pour la préparation et ne sont pas présentés comme des extraits de sujets officiels.