Le produit scalaire

Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**

2 Motivation et définition **1**
2.1 Pourquoi introduire le produit scalaire ? 1
2.2 Définition géométrique 1
2.3 Définition à partir des normes 2

3 Propriétés algébriques **2**
3.1 Symétrie et bilinéarité 2
3.2 Carré scalaire 2
3.3 Identités remarquables 2

4 Expression dans un repère orthonormé **2**
4.1 Formule en coordonnées 2
4.2 Application aux points 3

5 Orthogonalité et calcul des angles **3**
5.1 Caractérisation de l'orthogonalité 3
5.2 Calcul d'un angle 3

6 Projection orthogonale **4**
6.1 Projection d'un vecteur 4
6.2 Distance d'un point à une droite 4

7 Applications géométriques **4**
7.1 Théorème d'Al-Kashi 4
7.2 Équation cartésienne d'une droite 4
7.3 Travail d'une force constante 5

8 Exercices **5**

9 Éléments de correction **7**

10 Erreurs fréquentes et points de vigilance **9**

11 Conclusion et prolongements **9**

12 Références bibliographiques **9**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. La leçon suppose connues les notions de vecteur, de norme, de distance et d'angle géométrique. Les élèves doivent maîtriser le théorème de Pythagore, les relations trigonométriques dans le triangle rectangle, les coordonnées dans un repère orthonormé ainsi que les opérations sur les vecteurs. La manipulation des expressions algébriques et le calcul littéral sont également nécessaires.

Objectifs. L'objectif est de définir le produit scalaire de deux vecteurs et d'en établir les principales propriétés. On cherche à articuler trois points de vue : géométrique, à l'aide des normes et des angles ; algébrique, à l'aide des identités vectorielles ; et analytique, à l'aide des coordonnées dans un repère orthonormé. Le produit scalaire permet notamment de caractériser l'orthogonalité, de calculer des angles et des longueurs, de déterminer des projections orthogonales et de résoudre des problèmes de géométrie plane.

2 Motivation et définition

2.1 Pourquoi introduire le produit scalaire ?

Le produit scalaire fournit un nombre réel à partir de deux vecteurs. Il permet de traduire certaines propriétés géométriques en égalités algébriques.

Il généralise notamment le lien entre longueurs, angles et orthogonalité. Il intervient aussi en physique, par exemple dans l'expression du travail d'une force constante.

2.2 Définition géométrique

Définition 1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan euclidien. Leur produit scalaire est le réel défini par*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,}$$

où θ est une mesure de l'angle entre les deux vecteurs lorsqu'ils sont non nuls.

Si l'un des deux vecteurs est nul, leur produit scalaire est nul.

Le produit scalaire est donc positif lorsque l'angle est aigu, nul lorsque les vecteurs sont orthogonaux, et négatif lorsque l'angle est obtus.

Exemple 1. *Si $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et si l'angle entre les deux vecteurs mesure $60°$, alors*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 \times \cos(60°) = 6.$$

2.3 Définition à partir des normes

Propriété 1 (Identité de polarisation)**.** *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right).}$$

De manière équivalente,

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right).}$$

Cette expression permet de définir le produit scalaire à partir des longueurs, sans faire intervenir explicitement l'angle.

3 Propriétés algébriques

3.1 Symétrie et bilinéarité

Propriété 2. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tous réels λ, μ,*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u},$$

$$(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) \cdot \vec{w} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{w}) + \mu(\vec{v} \cdot \vec{w}),$$

et

$$\vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \mu(\vec{u} \cdot \vec{w}).$$

Le produit scalaire est donc une forme bilinéaire symétrique.

3.2 Carré scalaire

Propriété 3. *Pour tout vecteur $\vec{u}$,*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2.}$$

En particulier,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0, \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}.$$

3.3 Identités remarquables

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

et

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}.}$$

Ces formules généralisent le théorème de Pythagore : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, alors

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.$$

4 Expression dans un repère orthonormé

4.1 Formule en coordonnées

Théorème 1. *Dans un repère orthonormé du plan, soient*

$$\vec{u} = (x, y), \qquad \vec{v} = (x', y').$$

Alors

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.}$$

Démonstration. En notant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ les vecteurs unitaires du repère orthonormé, on écrit

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}, \qquad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}.$$

Par bilinéarité,

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} = xx'(\vec{i} \cdot \vec{i}) + xy'(\vec{i} \cdot \vec{j}) \\ + yx'(\vec{j} \cdot \vec{i}) + yy'(\vec{j} \cdot \vec{j}).\end{aligned}$$

Or

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = 1, \qquad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0.$$

D'où

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

□

4.2 Application aux points

Soient $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ et $C(x_C, y_C)$. On a

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A),$$

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A).$$

Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A).}$$

La distance entre deux points vérifie également

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2.$$

5 Orthogonalité et calcul des angles

5.1 Caractérisation de l'orthogonalité

Théorème 2. *Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.}$$

Cette caractérisation permet de démontrer qu'un triangle est rectangle, de vérifier le parallélisme de certaines droites par d'autres méthodes ou de déterminer des équations de droites.

Exemple 2. *Soient $\vec{u} = (2, 3)$ et $\vec{v} = (3, -2)$. Alors*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0.$$

Les deux vecteurs sont donc orthogonaux.

5.2 Calcul d'un angle

Pour deux vecteurs non nuls,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}.}$$

En particulier, pour un triangle ABC non dégénéré,

$$\boxed{\cos(\widehat{BAC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC}.}$$

On peut ainsi déterminer la nature d'un angle :

— si le produit scalaire est positif, l'angle est aigu ;

— s'il est nul, l'angle est droit ;

— s'il est négatif, l'angle est obtus.

6 Projection orthogonale

6.1 Projection d'un vecteur

Soit $\vec{v}$ un vecteur non nul. La projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$ est un vecteur colinéaire à $\vec{v}$, défini par

$$\boxed{\text{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.}$$

Cette formule s'obtient en recherchant un réel λ tel que $\vec{u} - \lambda\vec{v}$ soit orthogonal à $\vec{v}$. On doit alors avoir

$$(\vec{u} - \lambda\vec{v})\cdot\vec{v} = 0,$$

d'où

$$\lambda = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}.$$

6.2 Distance d'un point à une droite

La projection orthogonale permet de déterminer le pied de la perpendiculaire issue d'un point à une droite, puis de calculer la distance de ce point à cette droite.

Elle intervient également dans les problèmes de minimisation de distances et dans les questions de géométrie analytique.

7 Applications géométriques

7.1 Théorème d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, on pose

$$a = BC, \qquad b = CA, \qquad c = AB.$$

L'identité du carré d'une différence donne

$$\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\|^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

Or

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AB\cdot AC\cos(\widehat{BAC})$$

et

$$\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\| = BC.$$

On obtient donc

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{BAC}).}$$

Cette formule généralise le théorème de Pythagore.

7.2 Équation cartésienne d'une droite

Soit une droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (a, b) \neq (0, 0)$.

Un point $M(x, y)$ appartient à cette droite si et seulement si

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0.$$

Ainsi,

$$a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0,$$

soit

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

pour une constante réelle c.

Le produit scalaire permet donc de relier l'orthogonalité à l'équation cartésienne d'une droite.

7.3 Travail d'une force constante

En physique, le travail d'une force constante $\vec{F}$ lors d'un déplacement $\vec{d}$ est donné par

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \vec{d}.}$$

Si θ est l'angle entre la force et le déplacement, alors

$$W = \|\vec{F}\| \, \|\vec{d}\| \cos\theta.$$

Cette application donne un sens concret au signe du produit scalaire : une force peut favoriser le déplacement, lui être perpendiculaire ou s'y opposer.

8 Exercices

Les exercices suivants permettent de travailler progressivement les différentes approches du produit scalaire. Les résultats sont à justifier.

Exercice 1 – Calcul géométrique

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifient

$$\|\vec{u}\| = 5, \qquad \|\vec{v}\| = 2, \qquad \theta = 60°.$$

a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Quel serait le produit scalaire si l'angle était égal à $120°$?

c) Interpréter géométriquement le signe obtenu.

Exercice 2 – Calcul en coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère

$$\vec{u} = (3, -2), \qquad \vec{v} = (4, 6).$$

a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Calculer les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Les deux vecteurs sont-ils orthogonaux ?

d) Déterminer le cosinus de l'angle entre ces vecteurs.

Exercice 3 – Triangle rectangle

Dans un repère orthonormé, on donne

$$A(1, 2), \qquad B(5, 4), \qquad C(2, 8).$$

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

c) En déduire la nature de l'angle $\widehat{BAC}$.

d) Calculer les longueurs AB, AC et BC.

Exercice 4 – Théorème d'Al-Kashi

Un triangle ABC vérifie

$$AB = 6, \qquad AC = 8, \qquad \widehat{BAC} = 60^\circ.$$

a) Calculer BC à l'aide du théorème d'Al-Kashi.

b) Retrouver le résultat en utilisant les produits scalaires.

c) Le triangle est-il rectangle ?

Exercice 5 – Orthogonalité et lieu géométrique

Dans un repère orthonormé, on fixe

$$A(1, 2), \qquad B(5, 4).$$

On cherche les points $M(x, y)$ tels que

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = 0.$$

a) Écrire cette condition en coordonnées.

b) Déterminer l'équation cartésienne du lieu de M.

c) Interpréter géométriquement ce lieu.

Exercice 6 – Projection orthogonale

Dans un repère orthonormé, soient

$$\vec{u} = (4, 2), \qquad \vec{v} = (1, 2).$$

a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et $\|\vec{v}\|^2$.

b) Déterminer la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur la direction de $\vec{v}$.

c) Vérifier que la différence entre $\vec{u}$ et sa projection est orthogonale à $\vec{v}$.

Exercice 7 – Identités vectorielles

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que

$$\|\vec{u}\| = 3, \qquad \|\vec{v}\| = 4, \qquad \|\vec{u} + \vec{v}\| = 5.$$

a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

b) Les vecteurs sont-ils orthogonaux ?

c) Calculer $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Soit $ABCD$ un rectangle de dimensions

$$AB = a, \qquad AD = b,$$

où $a, b > 0$. On note O l'intersection de ses diagonales.

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$.

c) En déduire une propriété d'orthogonalité éventuelle des diagonales.

d) Dans quel cas le rectangle est-il un carré ?

Exercice 9 – Niveau approfondi

Soient A, B et C trois points du plan tels que

$$AB = AC.$$

On note I le milieu de $[BC]$.

a) Établir que $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

b) En déduire que la médiane issue de A est perpendiculaire à la droite (BC).

c) Retrouver ce résultat en utilisant le théorème de Pythagore.

9 Éléments de correction

Exercice 1

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times 2 \times \cos 60^\circ = 5.$$

Pour un angle de 120°, le produit scalaire vaut $10 \cos 120^\circ = -5$.

Exercice 2

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 4 + (-2) \times 6 = 0.$$

Les normes valent $\sqrt{13}$ et $\sqrt{52}$. Les vecteurs sont orthogonaux.

Exercice 3

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2), \qquad \overrightarrow{AC} = (1, 6).$$

Le produit scalaire vaut

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 + 12 = 16.$$

L'angle $\widehat{BAC}$ est aigu, et non droit. Les longueurs sont

$$AB = 2\sqrt{5}, \qquad AC = \sqrt{37}, \qquad BC = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$$

Exercice 4

Le théorème d'Al-Kashi donne

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \times 6 \times 8 \times \frac{1}{2} = 52.$$

Ainsi, $BC = 2\sqrt{13}$. Le triangle n'est pas rectangle, car aucune des trois égalités de Pythagore n'est vérifiée.

Exercice 5

On a $\overrightarrow{AB} = (4, 2)$ et $\overrightarrow{AM} = (x - 1, y - 2)$. La condition devient

$$4(x - 1) + 2(y - 2) = 0,$$

soit

$$2x + y - 4 = 0.$$

Il s'agit de la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).

Exercice 6

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 8, \qquad \|\vec{v}\|^2 = 5.$$

La projection est

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{8}{5}(1,2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right).$$

La différence vaut

$$\left(\frac{12}{5}, -\frac{6}{5}\right),$$

et son produit scalaire avec $\vec{v}$ est nul.

Exercice 7

L'identité du carré d'une somme donne

$$25 = 9 + 16 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Les vecteurs sont orthogonaux et

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 9 + 16 = 25,$$

donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = 5$.

Exercice 8

Dans un repère adapté,

$$\overrightarrow{AB} = (a, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (0, b), \quad \overrightarrow{AC} = (a, b), \quad \overrightarrow{BD} = (-a, b).$$

On obtient

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

et

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -a^2 + b^2.$$

Les diagonales sont orthogonales si et seulement si $a = b$, c'est-à-dire lorsque le rectangle est un carré.

Exercice 9

Puisque I est le milieu de $[BC]$,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}, \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}.$$

L'égalité $AB = AC$ entraîne

$$\|\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB}\|^2 = \|\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB}\|^2.$$

En développant, on obtient

$$4\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} = 0.$$

Ainsi, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ puisque $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{IB}$. La médiane issue de A est donc perpendiculaire à (BC).

10 Erreurs fréquentes et points de vigilance

— Confondre le produit scalaire, qui est un réel, avec le produit de deux vecteurs.

— Oublier que la formule avec le cosinus suppose de connaître les normes et l'angle entre les vecteurs.

— Utiliser la formule en coordonnées dans un repère non orthonormé sans correction.

— Confondre les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$: ils sont opposés.

— Conclure à l'orthogonalité sans vérifier que le produit scalaire est nul.

— Oublier que le signe du produit scalaire dépend de l'angle entre les vecteurs.

11 Conclusion et prolongements

Le produit scalaire est un outil fondamental de la géométrie euclidienne. Il relie les longueurs, les angles, les coordonnées et l'orthogonalité. Sa maîtrise permet de résoudre de nombreux problèmes de géométrie plane et prépare à l'étude des espaces euclidiens, des formes quadratiques et des applications du produit scalaire en physique.

Les prolongements possibles sont :

— le produit scalaire dans l'espace ;

— les équations de droites et de plans ;

— les projections orthogonales et les distances ;

— les espaces vectoriels euclidiens et les matrices de Gram, dans un cadre plus avancé.

12 Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*. Référence historique pour la géométrie euclidienne et les relations entre longueurs et orthogonalité.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletins officiels et ressources institutionnelles disponibles sur : https://www.education.gouv.fr/.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Éduscol – Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*. https://eduscol.education.fr/.

[4] IREM et ressources universitaires de mathématiques, cours de géométrie euclidienne et de produit scalaire. Ces ressources peuvent être consultées auprès des instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques et des bibliothèques universitaires.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES de mathématiques : programmes, sujets et rapports de jury*. Les rapports de jury permettent de préciser les attentes de l'épreuve orale et les connaissances mobilisées. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.