Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Théorème de Thalès

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**
- 1.1 Prérequis . . . 1
- 1.2 Objectifs . . . 1

2 Introduction et motivation **1**

3 Énoncé du théorème de Thalès **2**
- 3.1 Configuration triangulaire . . . 2
- 3.2 Cas des points situés sur les prolongements . . . 2
- 3.3 Démonstration par les aires . . . 2

4 Réciproque du théorème de Thalès **3**
- 4.1 Démonstration . . . 3

5 Contraposée du théorème de Thalès **3**

6 Applications numériques **3**
- 6.1 Calcul d'une longueur . . . 3
- 6.2 Démonstration d'un parallélisme . . . 4
- 6.3 Mesure d'une hauteur inaccessible . . . 4

7 Lien avec les homothéties **4**

8 Lien avec la géométrie analytique **5**

9 Erreurs fréquentes et points de vigilance **5**

10 Liste d'exercices **5**

11 Pistes didactiques pour l'oral **7**

12 Conclusion **8**

13 Références bibliographiques et institutionnelles **8**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

L'étude du théorème de Thalès nécessite la connaissance :

— des propriétés de la proportionnalité ;

— des notions de droites parallèles et de droites sécantes ;

— des propriétés des triangles et des angles ;

— des rapports de longueurs et des règles de calcul sur les fractions ;

— de la résolution d'équations simples ;

— des configurations géométriques usuelles dans le plan.

Dans une approche vectorielle, on pourra également mobiliser les notions de vecteur, de colinéarité et de repère.

1.2 Objectifs

Cette leçon vise à :

— énoncer et utiliser le théorème de Thalès dans une configuration triangulaire ;

— comprendre la réciproque du théorème et son utilisation pour démontrer le parallélisme de deux droites ;

— distinguer le théorème direct, sa réciproque et sa contraposée ;

— résoudre des problèmes de calcul de longueurs ;

— établir des relations de proportionnalité entre des longueurs géométriques ;

— mettre en évidence des applications du théorème à la géométrie analytique, à l'homothétie et aux problèmes de mesure.

L'enjeu didactique est de faire comprendre que le parallélisme entraîne une relation de proportionnalité entre des longueurs, et que cette relation peut, sous certaines conditions, être utilisée en sens inverse.

2 Introduction et motivation

Le théorème de Thalès est un résultat fondamental de la géométrie euclidienne. Il permet de relier le parallélisme de droites à des rapports de longueurs.

Historiquement, le résultat est associé à Thalès de Milet (*VI^e siècle avant notre ère*), auquel la tradition attribue notamment des méthodes de mesure de hauteurs inaccessibles à partir de propriétés géométriques.

Dans l'enseignement, le théorème intervient dans :

— le calcul de distances inaccessibles ;

— les problèmes d'agrandissement et de réduction ;

— les configurations de triangles emboîtés ;

— la justification du parallélisme de droites ;

— l'étude des homothéties.

3 Énoncé du théorème de Thalès

3.1 Configuration triangulaire

Soit ABC un triangle. On considère deux points M et N tels que :

$$M \in (AB), \qquad N \in (AC),$$

et supposons que les droites (MN) et (BC) soient parallèles.

Théorème 3.1 (Théorème de Thalès)**.** *Si A, M, B sont alignés, si A, N, C sont alignés, et si $(MN) \parallel (BC)$, alors :*

$$\boxed{\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.}$$

Les longueurs désignent ici des distances, donc des nombres positifs. La relation s'applique aussi bien lorsque M et N appartiennent aux segments $[AB]$ et $[AC]$ que dans certaines configurations avec des points situés sur les prolongements, à condition de respecter les hypothèses d'alignement et de parallélisme.

3.2 Cas des points situés sur les prolongements

Lorsque les points ne sont pas nécessairement situés sur les segments $[AB]$ et $[AC]$, il convient de préciser leur position relative.

Dans une configuration où A, M, B sont alignés, A, N, C sont alignés et $(MN) \parallel (BC)$, les triangles AMN et ABC sont homothétiques de centre A. Les rapports de longueurs vérifient alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Cette écriture porte sur des longueurs non orientées et reste valable dans les configurations considérées, dès lors que les points correspondants sont bien définis.

3.3 Démonstration par les aires

Supposons que $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$.

Les triangles AMN et ABC ont le même angle en A. Leurs hauteurs relatives aux bases AM et AB sont proportionnelles, de même que celles relatives aux bases AN et AC.

On peut aussi utiliser directement les aires :

$$\frac{\mathcal{A}(AMN)}{\mathcal{A}(ABC)} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC}.$$

Puisque $(MN) \parallel (BC)$, les triangles ont des angles correspondants égaux et sont semblables. Le rapport de similitude est donc le même pour les trois côtés :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}.$$

Cette démonstration fait apparaître le lien entre Thalès et la similitude des triangles. Selon le niveau considéré, une démonstration fondée sur les aires ou sur les triangles semblables peut être privilégiée.

4 Réciproque du théorème de Thalès

Théorème 4.1 (Réciproque de Thalès)**.** *Soient A, M, B trois points alignés dans cet ordre et A, N, C trois points alignés dans cet ordre.*

Si

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC},$$

alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

Remarque 4.2. *L'ordre des points est essentiel dans cette formulation. Dans une configuration plus générale, il faut vérifier que les points sont disposés de façon compatible sur les deux droites. L'égalité de rapports, à elle seule et sans hypothèses de position, ne suffit pas à conclure au parallélisme.*

4.1 Démonstration

Par M, traçons la parallèle à (BC) et notons N' son intersection avec la droite (AC).
D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN'}{AC}.$$

Or, par hypothèse :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Ainsi,

$$\frac{AN'}{AC} = \frac{AN}{AC}.$$

Comme $AC \neq 0$, on obtient $AN' = AN$.

Compte tenu de la position des points, $N' = N$. Par conséquent, (MN) est parallèle à (BC).

5 Contraposée du théorème de Thalès

La contraposée est utile pour démontrer que deux droites ne sont pas parallèles.

Propriété 5.1 (Contraposée)**.** *Dans une configuration où les points sont alignés comme dans le théorème de Thalès, si*

$$\frac{AM}{AB} \neq \frac{AN}{AC},$$

alors les droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles.

Il faut donc distinguer :

— le théorème direct, qui permet de calculer des longueurs ;

— la réciproque, qui permet de démontrer le parallélisme ;

— la contraposée, qui permet de démontrer le non-parallélisme.

6 Applications numériques

6.1 Calcul d'une longueur

Dans le triangle ABC, on suppose que $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$.
On connaît :

$$AM = 3, \qquad AB = 7, \qquad AC = 14.$$

Le théorème de Thalès donne :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}.$$

Ainsi,

$$\frac{3}{7} = \frac{AN}{14},$$

d'où

$$AN = \frac{3 \times 14}{7} = 6.$$

Conclusion : $AN = 6$.

6.2 Démonstration d'un parallélisme

Soient A, M, B alignés dans cet ordre et A, N, C alignés dans cet ordre. On suppose :

$$AM = 4, \quad AB = 10, \quad AN = 6, \quad AC = 15.$$

On calcule :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}.$$

Les deux rapports sont égaux. D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (MN) et (BC) sont parallèles.

6.3 Mesure d'une hauteur inaccessible

On souhaite déterminer la hauteur d'un arbre à partir de son ombre. On mesure simultanément :

— la longueur de l'ombre de l'arbre : 12 m ;

— la hauteur d'un bâton vertical : 1,5 m ;

— la longueur de l'ombre du bâton : 2 m.

Lorsque les rayons du Soleil peuvent être considérés comme parallèles, les triangles formés par l'arbre et son ombre, d'une part, et par le bâton et son ombre, d'autre part, sont semblables.

Si h désigne la hauteur de l'arbre, on obtient :

$$\frac{h}{12} = \frac{1{,}5}{2}.$$

Donc :

$$h = \frac{12 \times 1{,}5}{2} = 9.$$

La hauteur de l'arbre est de 9 m.

Cette méthode repose sur un modèle géométrique : le terrain doit être suffisamment horizontal et les objets considérés verticaux.

7 Lien avec les homothéties

Définition 7.1. *Une homothétie de centre A et de rapport $k \neq 0$ est une transformation qui, à tout point X, associe un point X' tel que :*

$$\overrightarrow{AX'} = k\overrightarrow{AX}.$$

Si M est l'image de B et N l'image de C par une homothétie de centre A et de rapport k, alors :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = |k|.$$

Les droites (MN) et (BC) sont parallèles, sauf dans les cas dégénérés où les points ne définissent pas les droites considérées.

Le théorème de Thalès peut ainsi être interprété comme une conséquence des propriétés métriques des homothéties.

8 Lien avec la géométrie analytique

Dans un repère, soient $A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$ et $C(c_1, c_2)$.
Si M et N sont définis par :

$$\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AN} = t\overrightarrow{AC},$$

alors :

$$M = A + t(B - A), \qquad N = A + t(C - A).$$

Par soustraction :

$$\overrightarrow{MN} = N - M = t(C - B) = t\overrightarrow{BC}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires. Par conséquent, les droites (MN) et (BC) sont parallèles lorsque les droites sont définies.

Cette écriture vectorielle donne une formulation algébrique de la configuration de Thalès et permet de relier le théorème à la colinéarité.

9 Erreurs fréquentes et points de vigilance

Les erreurs suivantes doivent être anticipées dans l'enseignement :

— appliquer le théorème sans avoir vérifié le parallélisme ;

— associer incorrectement les côtés correspondants ;

— inverser un seul rapport dans une égalité de fractions ;

— utiliser la réciproque sans vérifier l'alignement et l'ordre des points ;

— confondre le théorème direct et sa réciproque ;

— effectuer un calcul numérique sans interpréter le résultat ;

— oublier que les longueurs sont positives dans la formulation métrique.

Une rédaction rigoureuse doit préciser la configuration, citer les hypothèses, écrire les rapports correspondants, effectuer les calculs et conclure explicitement.

10 Liste d'exercices

Exercice 1 – Application directe

Dans un triangle ABC, les points M et N appartiennent respectivement à $[AB]$ et $[AC]$, avec $(MN) \parallel (BC)$.
On donne :

$$AM = 4, \quad AB = 10, \quad AC = 15, \quad BC = 12.$$

a) Calculer AN.

b) Calculer MN.

c) Rédiger une justification complète.

Exercice 2 – Réciproque

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, de même que les points A, N, C. On donne :

$$AM = 3, \quad AB = 8, \quad AN = 4{,}5, \quad AC = 12.$$

Démontrer que (MN) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3 – Contraposée

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, de même que les points A, N, C. On donne :

$$AM = 5, \quad AB = 12, \quad AN = 7, \quad AC = 16.$$

Déterminer si les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Justifier la réponse.

Exercice 4 – Configuration avec prolongements

Les points A, M, B sont alignés dans cet ordre et les points A, N, C dans cet ordre. On sait que $(MN) \parallel (BC)$, $AM = 6$, $AB = 9$ et $MN = 8$.

Calculer BC.

Exercice 5 – Mesure indirecte

Un observateur souhaite estimer la hauteur d'un bâtiment. Une tige verticale de hauteur 1,2 m projette une ombre de longueur 0,8 m. Au même instant, l'ombre du bâtiment mesure 14 m.

En supposant les conditions géométriques adaptées, calculer la hauteur du bâtiment.

Exercice 6 – Démonstration

Dans un triangle ABC, on prend $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que $(MN) \parallel (BC)$.

Démontrer que les triangles AMN et ABC sont semblables, puis en déduire le théorème de Thalès.

Exercice 7 – Coordonnées

Dans un repère, on considère :

$$A(1, 2), \quad B(7, 2), \quad C(3, 8).$$

On définit :

$$M = A + \frac{1}{2}(B - A), \qquad N = A + \frac{1}{2}(C - A).$$

a) Calculer les coordonnées de M et N.

b) Vérifier que (MN) est parallèle à (BC).

c) Interpréter le résultat à l'aide du théorème de Thalès.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Dans un triangle ABC, les points M et N appartiennent respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$.

On sait que :

$$AB = 12, \quad AC = 15, \quad AM = 8, \quad AN = 10.$$

a) Démontrer que $(MN) \parallel (BC)$.

b) Sachant que $BC = 9$, calculer MN.

c) Expliquer le rôle respectif de la réciproque et du théorème direct dans la résolution.

Éléments de correction

1. Exercice 1 :
$$AN = 15\frac{4}{10} = 6, \qquad MN = 12\frac{4}{10} = 4{,}8.$$
2. Exercice 2 :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{3}{8}, \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{4{,}5}{12} = \frac{3}{8}.$$
La réciproque permet de conclure au parallélisme.
3. Exercice 3 :
$$\frac{5}{12} \neq \frac{7}{16}.$$
Les droites ne sont pas parallèles, par contraposée.
4. Exercice 4 :
$$BC = MN\frac{AB}{AM} = 8\frac{9}{6} = 12.$$
5. Exercice 5 :
$$h = 14\frac{1{,}2}{0{,}8} = 21 \text{ m}.$$
6. Exercice 6 : les angles correspondants sont égaux du fait du parallélisme ; les triangles sont semblables, d'où l'égalité des rapports de côtés correspondants.
7. Exercice 7 :
$$M(4,2), \qquad N(2,5).$$
On a :
$$\overrightarrow{MN} = (-2,3), \qquad \overrightarrow{BC} = (-4,6).$$
Donc $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, ce qui prouve le parallélisme.
8. Exercice 8 :
$$\frac{AM}{AB} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}, \qquad \frac{AN}{AC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}.$$
La réciproque donne $(MN) \parallel (BC)$, puis le théorème direct donne :
$$MN = 9\frac{2}{3} = 6.$$

11 Pistes didactiques pour l'oral

La présentation orale peut être organisée en trois temps :

1. **Découverte :** faire observer une configuration avec deux droites parallèles coupant deux sécantes, puis conjecturer les rapports égaux.
2. **Institutionnalisation :** énoncer précisément le théorème, établir une démonstration et distinguer réciproque et contraposée.
3. **Réinvestissement :** proposer un problème de calcul de longueur, puis une situation où il faut démontrer le parallélisme.

L'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique peut permettre de déplacer les points tout en conservant le parallélisme et d'observer la stabilité des rapports. Cette observation favorise la formulation d'une conjecture, mais ne remplace pas une démonstration.

Une attention particulière doit être portée à la formulation des hypothèses et à la rédaction des raisonnements.

12 Conclusion

Le théorème de Thalès établit un lien essentiel entre parallélisme et proportionnalité. Sa maîtrise repose autant sur la connaissance de ses énoncés que sur l'identification correcte des configurations et sur la rigueur de la rédaction.

Sa réciproque permet de démontrer un parallélisme, tandis que sa contraposée permet d'établir le non-parallélisme. Le théorème s'inscrit également dans une perspective plus large, en relation avec la similitude des triangles, les homothéties et la géométrie vectorielle.

13 Références bibliographiques et institutionnelles

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres V et VI. Ces livres présentent notamment la théorie des proportions et ses applications à la géométrie.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter les programmes et ressources en vigueur sur `https://www.education.gouv.fr/`.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques du collège*, Éduscol. `https://eduscol.education.fr/`.

[4] Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM), ressources pédagogiques et activités de géométrie. `https://www.univ-irem.fr/`.

[5] GeoGebra, *Logiciel de géométrie dynamique et ressources pédagogiques*. `https://www.geogebra.org/`.