Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Relations métriques et trigonométriques dans un triangle

Table des matières

1 Introduction et problématique **3**

2 Prérequis et objectifs **3**
- 2.1 Prérequis . . . 3
- 2.2 Objectifs . . . 3

3 Relations métriques dans un triangle rectangle **3**
- 3.1 Théorème de Pythagore . . . 4
- 3.2 Théorème de la hauteur . . . 4
- 3.3 Théorème des projections . . . 4

4 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle **5**

5 La loi des cosinus : théorème d'Al-Kashi **5**
- 5.1 Énoncé . . . 5
- 5.2 Démonstration par le produit scalaire . . . 6
- 5.3 Applications . . . 6

6 La loi des sinus **6**
- 6.1 Énoncé . . . 6
- 6.2 Démonstration par l'aire . . . 7
- 6.3 Interprétation géométrique : cercle circonscrit . . . 7
- 6.4 Utilisation et précautions . . . 7

7 Formules d'aire et autres relations métriques **7**
- 7.1 Aire d'un triangle . . . 7
- 7.2 Formule de Héron . . . 8
- 7.3 Relations avec le rayon inscrit . . . 8

8 Exemple d'application : résolution complète **8**
- 8.1 Calcul du côté a . . . 8
- 8.2 Calcul de l'angle β . . . 8
- 8.3 Calcul de l'angle γ . . . 9
- 8.4 Calcul de l'aire . . . 9

9 Synthèse des principales formules **9**

10 Pistes pédagogiques et didactiques **9**
- 10.1 Progression possible . . . 9
- 10.2 Erreurs fréquentes des élèves . . . 10

11 Questions possibles du jury **10**

12 Conclusion **11**

1 Introduction et problématique

Les relations métriques et trigonométriques permettent de déterminer des longueurs, des angles, des aires et des rayons associés à un triangle à partir d'informations partielles.

Elles constituent un outil fondamental en géométrie euclidienne et interviennent dans de nombreuses applications, notamment en topographie, en navigation et en modélisation.

La problématique de cette leçon est la suivante :

Comment relier les longueurs des côtés et les mesures des angles d'un triangle afin de résoudre des problèmes géométriques ?

Nous étudierons d'abord les relations métriques liées aux projections orthogonales, puis les relations faisant intervenir le produit scalaire, avant de présenter les lois fondamentales de la trigonométrie.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les connaissances suivantes sont nécessaires :

— théorème de Pythagore et sa réciproque ;
— propriétés des triangles rectangles ;
— notions de projection orthogonale ;
— définitions du sinus, du cosinus et de la tangente d'un angle aigu ;
— produit scalaire de deux vecteurs ;
— formules d'aire d'un triangle.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, l'élève doit pouvoir :

— établir et utiliser les relations métriques dans un triangle rectangle ;
— appliquer la loi des cosinus et la loi des sinus ;
— calculer une longueur, un angle ou une aire ;
— choisir une relation adaptée aux données d'un problème ;
— démontrer certaines relations trigonométriques à l'aide du produit scalaire.

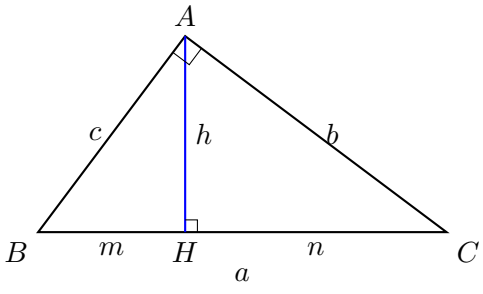
3 Relations métriques dans un triangle rectangle

Considérons un triangle ABC rectangle en A. On pose

$$AB = c, \qquad AC = b, \qquad BC = a.$$

Soit H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On note

$$BH = m, \qquad HC = n, \qquad AH = h.$$



On a

$$a = m + n.$$

3.1 Théorème de Pythagore

Théorème 3.1 (Théorème de Pythagore)**.** *Dans un triangle ABC rectangle en A,*

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}.$$

Cette relation permet de calculer un côté à partir des deux autres.

La réciproque du théorème de Pythagore permet de caractériser un triangle rectangle : si a est le plus grand côté et si

$$a^2 = b^2 + c^2,$$

alors le triangle est rectangle en A.

3.2 Théorème de la hauteur

Les triangles ABH et AHC sont semblables. On obtient

$$\frac{BH}{AH} = \frac{AH}{HC}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{h^2 = mn}.$$

Théorème 3.2 (Théorème de la hauteur)**.** *Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur issue de l'angle droit est égal au produit des deux segments de l'hypoténuse qu'elle détermine.*

3.3 Théorème des projections

La similitude des triangles ABH et ABC donne

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BH}{AB}.$$

Ainsi,

$$\boxed{c^2 = am}.$$

De même, la similitude des triangles AHC et ABC conduit à

$$\boxed{b^2 = an}.$$

Ces relations s'écrivent également

$$\boxed{AB^2 = BC \cdot BH}$$

et

$$\boxed{AC^2 = BC \cdot HC}.$$

On peut retrouver la relation entre la hauteur et les côtés :

$$\begin{aligned} h^2 &= mn \\ &= \frac{c^2}{a}\frac{b^2}{a} \\ &= \frac{b^2c^2}{a^2}. \end{aligned}$$

Comme les longueurs sont positives,

$$\boxed{h = \frac{bc}{a}}.$$

Cette dernière égalité se retrouve en égalant les deux expressions de l'aire du triangle :

$$\frac{bc}{2} = \frac{ah}{2}.$$

4 Relations trigonométriques dans un triangle rectangle

Pour un angle aigu θ d'un triangle rectangle, on définit le sinus, le cosinus et la tangente par

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}}.$$

Ces définitions conduisent aux identités fondamentales :

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

et, lorsque $\cos\theta \neq 0$,

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}.$$

La première identité découle directement du théorème de Pythagore, en divisant celui-ci par le carré de l'hypoténuse.

Pour deux angles complémentaires, on a également

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Ces relations permettent de calculer des côtés ou des angles dans un triangle rectangle. Pour traiter un triangle quelconque, il faut généraliser ces résultats.

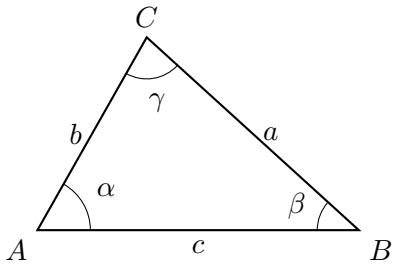
5 La loi des cosinus : théorème d'Al-Kashi

Considérons un triangle ABC quelconque. On adopte les notations usuelles :

$$a = BC, \qquad b = CA, \qquad c = AB,$$

et

$$\alpha = \widehat{BAC}, \quad \beta = \widehat{ABC}, \quad \gamma = \widehat{ACB}.$$



5.1 Énoncé

Théorème 5.1 (Théorème d'Al-Kashi)**.** *Dans tout triangle ABC,*

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta}$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}.$$

Ce théorème généralise le théorème de Pythagore. Lorsque $\alpha = \pi/2$, le terme $\cos\alpha$ est nul et l'on retrouve $a^2 = b^2 + c^2$.

5.2 Démonstration par le produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta,$$

où θ est l'angle entre les deux vecteurs.

Or,

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}.$$

En prenant le carré de la norme,

$$\begin{aligned} a^2 &= \|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 \\ &= c^2 + b^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

L'angle entre $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AC}$ vaut $\pi - \alpha$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= bc\cos(\pi - \alpha) \\ &= -bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}.$$

La démonstration est terminée.

5.3 Applications

La loi des cosinus permet :

— de calculer un côté lorsque deux côtés et l'angle compris sont connus ;

— de déterminer un angle lorsque les trois côtés sont connus ;

— de caractériser un triangle rectangle à partir de ses longueurs.

Par exemple, si a, b, c sont connus,

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}.$$

Cette formule donne l'angle α par la fonction réciproque du cosinus, à condition que les longueurs définissent effectivement un triangle.

6 La loi des sinus

6.1 Énoncé

Théorème 6.1 (Loi des sinus)**.** *Dans un triangle ABC, on a*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}.$$

Les angles α, β, γ appartiennent à $]0, \pi[$, donc leurs sinus sont strictement positifs.

6.2 Démonstration par l'aire

Notons $\mathcal{A}$ l'aire du triangle ABC.

En prenant successivement chaque côté comme base, on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha,$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ca\sin\beta,$$

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

En divisant ces égalités par $\frac{1}{2}abc$, il vient

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

En inversant les rapports, on retrouve la loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}.$$

6.3 Interprétation géométrique : cercle circonscrit

Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle. La relation entre une corde et l'angle inscrit qui l'intercepte donne

$$a = 2R\sin\alpha.$$

On en déduit la forme étendue de la loi des sinus :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}.$$

Cette formulation relie directement les longueurs des côtés, les angles et le rayon du cercle circonscrit.

6.4 Utilisation et précautions

La loi des sinus est particulièrement adaptée lorsqu'on connaît un côté et son angle opposé, ainsi qu'un autre angle ou une autre paire côté-angle opposé.

Il faut toutefois être prudent lorsqu'on connaît deux côtés et un angle qui n'est pas compris entre eux : plusieurs triangles peuvent parfois satisfaire les données. Ce phénomène est appelé *cas ambigu de la loi des sinus*.

7 Formules d'aire et autres relations métriques

7.1 Aire d'un triangle

L'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle quelconque s'écrit, à partir de deux côtés et de l'angle compris,

$$\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha}.$$

Par permutation des sommets,

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ca\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma.$$

Cette formule généralise la formule classique « base fois hauteur, divisé par deux », puisque la hauteur issue de C vaut $b\sin\alpha$.

7.2 Formule de Héron

Lorsque les trois côtés sont connus, l'aire peut être calculée sans déterminer les angles.
On pose le demi-périmètre

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

La formule de Héron est

$$\boxed{\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Elle se démontre en partant de la formule $\mathcal{A} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, puis en utilisant la loi des cosinus et l'identité $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$.

Cette formule suppose que les longueurs a, b, c satisfont les inégalités triangulaires.

7.3 Relations avec le rayon inscrit

Soit r le rayon du cercle inscrit du triangle. Le centre du cercle inscrit est à distance r de chacun des côtés. En décomposant le triangle en trois triangles de hauteur r, on obtient

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{A} = pr} \qquad \text{et} \qquad \boxed{r = \frac{\mathcal{A}}{p}}.$$

Ces relations relient l'aire et le demi-périmètre au rayon du cercle inscrit.

8 Exemple d'application : résolution complète

Considérons un triangle ABC tel que

$$b = 5, \qquad c = 7, \qquad \alpha = 60^\circ.$$

Déterminons le côté a, puis les angles β et γ, et enfin l'aire du triangle.

8.1 Calcul du côté a

On utilise la loi des cosinus :

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= 25 + 49 - 70 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 39. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{a = \sqrt{39} \approx 6{,}245}.$$

8.2 Calcul de l'angle β

La loi des sinus donne

$$\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\alpha}{a}.$$

Ainsi,

$$\sin\beta = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{39}}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\beta \approx 43{,}9^\circ}.$$

Dans cet exemple, la loi des cosinus permet aussi de calculer directement β, ce qui évite toute ambiguïté sur le choix de l'angle.

8.3 Calcul de l'angle γ

La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Donc

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta,$$

soit

$$\boxed{\gamma \approx 76{,}1^\circ}.$$

8.4 Calcul de l'aire

On utilise la formule de l'aire avec les deux côtés connus et l'angle compris :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} bc \sin \alpha.$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \boxed{\frac{35\sqrt{3}}{4}} \\ &\approx 15{,}16. \end{aligned}$$

Cet exercice illustre le choix complémentaire des outils : loi des cosinus pour trouver un côté, loi des sinus ou des cosinus pour déterminer un angle, puis formule de l'aire.

9 Synthèse des principales formules

Situation	**Relation adaptée**
Triangle rectangle	$a^2 = b^2 + c^2$
Hauteur sur l'hypoténuse	$h^2 = mn$
Projection sur l'hypoténuse	$b^2 = an, \quad c^2 = am$
Deux côtés et angle compris	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
Côtés et angles opposés	$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$
Deux côtés et angle compris, pour l'aire	$\mathcal{A} = \dfrac{1}{2} bc \sin\alpha$
Trois côtés, pour l'aire	Formule de Héron
Aire et demi-périmètre	$\mathcal{A} = pr$

10 Pistes pédagogiques et didactiques

10.1 Progression possible

Pour présenter ces notions à des élèves, une progression cohérente consiste à :

1. réactiver les connaissances sur les triangles rectangles et le théorème de Pythagore ;
2. introduire les relations métriques par une construction géométrique avec une hauteur ;
3. généraliser la trigonométrie à un triangle quelconque ;

4. établir la loi des cosinus à partir du produit scalaire ;
5. démontrer la loi des sinus à partir de l'aire ;
6. proposer des problèmes de synthèse dans lesquels l'élève doit choisir la relation pertinente.

Cette progression articule géométrie, calcul algébrique et trigonométrie, plutôt que de présenter les formules comme une liste à mémoriser.

10.2 Erreurs fréquentes des élèves

Les erreurs fréquentes comprennent :

— confondre un angle et son sinus ou son cosinus ;
— utiliser la loi des sinus avec un côté qui n'est pas opposé à l'angle correspondant ;
— oublier le signe négatif dans la loi des cosinus ;
— appliquer le théorème de Pythagore à un triangle qui n'est pas rectangle ;
— utiliser des valeurs en degrés sur une calculatrice réglée en radians, ou inversement ;
— oublier que la somme des angles vaut 180° dans un triangle euclidien ;
— choisir une solution incorrecte en utilisant la fonction réciproque du sinus dans un cas ambigu.

Une évaluation pertinente ne doit donc pas se limiter au calcul numérique : elle doit aussi vérifier que l'élève sait identifier les données, choisir une relation et justifier son emploi.

11 Questions possibles du jury

Pourquoi la loi des cosinus généralise-t-elle le théorème de Pythagore ?

Lorsque l'angle compris entre les côtés b et c est droit, son cosinus est nul. Le terme correctif disparaît et l'on retrouve

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Peut-on démontrer la loi des cosinus sans utiliser le produit scalaire ?

Oui. On peut introduire une hauteur et appliquer le théorème de Pythagore dans deux triangles rectangles. Une autre méthode consiste à utiliser les coordonnées des sommets dans un repère orthonormé.

Pourquoi la loi des sinus peut-elle conduire à deux triangles différents ?

Deux angles supplémentaires ont le même sinus :

$$\sin\theta = \sin(\pi - \theta).$$

Lorsque les données sont insuffisantes pour distinguer les deux possibilités, il faut vérifier la compatibilité de chaque solution avec les autres données du problème.

Quelle est la différence entre relations métriques et relations trigonométriques ?

Les relations métriques expriment notamment des égalités entre longueurs, carrés de longueurs et produits de segments. Les relations trigonométriques relient les longueurs aux angles par les fonctions sinus, cosinus et tangente.

Cette distinction n'est pas absolue : la loi des cosinus est à la fois une relation métrique et trigonométrique.

Quel est l'intérêt du produit scalaire dans cette leçon ?

Il fournit une démonstration concise de la loi des cosinus et permet de relier la géométrie du triangle aux outils vectoriels et analytiques.

Comment évaluer la maîtrise de ces résultats ?

En demandant aux élèves de résoudre des configurations variées, de justifier le choix d'une formule et, à un niveau plus avancé, de démontrer une relation ou de comparer plusieurs méthodes de résolution.

12 Conclusion

Les relations métriques et trigonométriques dans un triangle constituent un ensemble cohérent de résultats qui permettent de passer des longueurs aux angles et réciproquement.

Le théorème de Pythagore décrit le cas particulier du triangle rectangle. Les relations de projection et de hauteur approfondissent cette configuration. La loi des cosinus généralise Pythagore à tout triangle, tandis que la loi des sinus relie les côtés aux sinus des angles opposés.

Enfin, les formules d'aire et les relations avec les cercles inscrit et circonscrit complètent cet ensemble.

L'enjeu mathématique et pédagogique est de faire comprendre que ces formules ne sont pas indépendantes : elles découlent de propriétés géométriques fondamentales et doivent être choisies en fonction de la configuration étudiée.

Pour un oral du CAPES, il est important de ne pas se limiter à l'énoncé des formules : une démonstration rigoureuse de la loi des cosinus, une démonstration de la loi des sinus et un exemple de résolution de triangle permettent de structurer un exposé solide.

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres I, II, III et VI. Référence historique pour les propriétés des triangles, les relations métriques et les figures semblables.

[2] J. C. Carrega, *Théorie des corps : la règle et le compas*, Hermann, Paris, 1981. Ouvrage de référence pour les constructions géométriques et les fondements de la géométrie classique.

[3] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, Cédic/Fernand Nathan, Paris, 1977. Référence pour les fondements de la géométrie, les transformations et les propriétés métriques.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement du second degré (CAPES) de mathématiques*, site officiel du ministère. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/

Consulter les programmes, les rapports de jury et les documents de cadrage correspondant à la session préparée.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*, Éduscol. https://eduscol.education.fr/

Ressources institutionnelles pour les contenus enseignés, les compétences mathématiques et les démarches pédagogiques au collège et au lycée.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

Référence pour situer les relations métriques et trigonométriques dans les programmes scolaires.

[7] Michèle Audin, *Géométrie*, ouvrage de géométrie destiné à l'enseignement supérieur. À consulter pour approfondir les raisonnements géométriques et les méthodes de démonstration.