Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Produit vectoriel, produit mixte

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**
- 1.1 Prérequis . . . 1
- 1.2 Objectifs . . . 1

2 Le produit vectoriel **1**
- 2.1 Définition géométrique . . . 1
- 2.2 Expression dans une base orthonormée directe . . . 2
- 2.3 Propriétés algébriques . . . 2
- 2.4 Interprétation géométrique . . . 2
  - 2.4.1 Aire d'un parallélogramme . . . 2
  - 2.4.2 Équation d'un plan . . . 3
- 2.5 Exemple de calcul . . . 3

3 Le produit mixte **3**
- 3.1 Définition . . . 3
- 3.2 Expression dans une base orthonormée directe . . . 3
- 3.3 Propriétés . . . 4
- 3.4 Interprétation géométrique : volume . . . 4
- 3.5 Exemple de calcul . . . 4

4 Liens entre produit vectoriel et produit mixte **4**
- 4.1 Identité de Lagrange . . . 4
- 4.2 Identité du double produit vectoriel . . . 5
- 4.3 Déterminant et orientation . . . 5

5 Applications géométriques **5**
- 5.1 Calcul d'une aire à partir de coordonnées . . . 5
- 5.2 Calcul du volume d'un tétraèdre . . . 5
- 5.3 Équation d'un plan défini par trois points . . . 5
- 5.4 Distance d'un point à une droite . . . 6

6 Exercices proposés **6**

7 Erreurs fréquentes et points de vigilance **7**

8 Conclusion et prolongements **8**

9 Références bibliographiques **8**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose maîtrisés les notions suivantes :

— les espaces vectoriels et les bases ;

— les coordonnées d'un vecteur dans une base de l'espace ;

— le produit scalaire, la norme d'un vecteur et l'orthogonalité ;

— les déterminants d'ordre deux et trois ;

— les notions de parallélisme, de coplanarité et d'orientation de l'espace ;

— les formules de calcul d'aires et de volumes.

1.2 Objectifs

L'objectif est de présenter deux opérations fondamentales de la géométrie vectorielle dans l'espace euclidien orienté de dimension trois.

Le produit vectoriel permet de construire un vecteur orthogonal à deux vecteurs donnés, de calculer des aires et de caractériser le parallélisme.

Le produit mixte, défini à partir du produit scalaire et du produit vectoriel, permet de calculer des volumes orientés, de caractériser la coplanarité et d'étudier des configurations géométriques dans l'espace.

On cherchera à articuler les définitions géométriques, les expressions en coordonnées, les propriétés algébriques et les applications.

2 Le produit vectoriel

2.1 Définition géométrique

On considère un espace euclidien orienté E de dimension trois, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Définition 2.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de E. Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ est le vecteur noté $\vec{u} \times \vec{v}$ défini par les propriétés suivantes :*

— *$\vec{u} \times \vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$;*

— *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v})$ est direct ;*

— *sa norme vérifie*

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin \theta|,$$

où θ est un angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Si les vecteurs sont colinéaires, leur produit vectoriel est le vecteur nul.

La définition est cohérente avec l'identité

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle^2.$$

2.2 Expression dans une base orthonormée directe

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe. On pose

$$\vec{u} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}, \qquad \vec{v} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Alors

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}.}$$

On peut retenir cette expression à l'aide du déterminant formel

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est un moyen mnémotechnique de calcul : il se développe suivant la première ligne.

2.3 Propriétés algébriques

Propriété 2.2. *Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ, on a :*

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= -(\vec{v} \times \vec{u}), \\ \vec{u} \times \vec{u} &= \vec{0}, \\ (\lambda \vec{u}) \times \vec{v} &= \lambda(\vec{u} \times \vec{v}), \\ \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}. \end{aligned}$$

Le produit vectoriel est donc bilinéaire et antisymétrique.

Propriété 2.3. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si*

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}.}$$

Propriété 2.4. *Le produit vectoriel est orthogonal aux deux vecteurs qui le définissent :*

$$\langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{u} \rangle = 0, \qquad \langle \vec{u} \times \vec{v}, \vec{v} \rangle = 0.$$

Remarque 2.5. *Le produit vectoriel n'est pas associatif en général. Il ne faut donc pas confondre $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$ et $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$.*

2.4 Interprétation géométrique

2.4.1 Aire d'un parallélogramme

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. L'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs est

$$\boxed{\mathcal{A} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|.}$$

En effet, si θ est l'angle entre les deux vecteurs, l'aire est égale à la longueur de la base multipliée par la hauteur :

$$\mathcal{A} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \, |\sin \theta|.$$

L'aire du triangle construit sur ces deux vecteurs est donc

$$\boxed{\mathcal{A}_{\triangle} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|.}$$

2.4.2 Équation d'un plan

Soit un plan passant par un point A et dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le vecteur

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

est un vecteur normal au plan.

Si M_0 est un point du plan, l'équation cartésienne du plan s'écrit

$$\boxed{\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0.}$$

Dans un repère orthonormé, si $\vec{n} = (a, b, c)$ et $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, on obtient

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0.$$

2.5 Exemple de calcul

Dans une base orthonormée directe, soient

$$\vec{u} = (1, 2, 0), \qquad \vec{v} = (0, 1, 3).$$

Alors

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= (2 \times 3 - 0 \times 1,\ 0 \times 0 - 1 \times 3,\ 1 \times 1 - 2 \times 0) \\ &= (6, -3, 1). \end{aligned}$$

On vérifie que

$$(6, -3, 1) \cdot (1, 2, 0) = 6 - 6 = 0$$

et

$$(6, -3, 1) \cdot (0, 1, 3) = -3 + 3 = 0.$$

Le vecteur obtenu est bien orthogonal aux deux vecteurs de départ.
Son carré de norme vaut

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = 36 + 9 + 1 = 46.$$

L'aire du parallélogramme correspondant est donc $\sqrt{46}$.

3 Le produit mixte

3.1 Définition

Définition 3.1. *Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de E. Le produit mixte de ces trois vecteurs est le réel*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w}.}$$

Le produit mixte peut aussi s'écrire

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \vec{v} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}).$$

Ces égalités résultent des propriétés du déterminant.

3.2 Expression dans une base orthonormée directe

Si

$$\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \quad \vec{v} = (x_2, y_2, z_2), \quad \vec{w} = (x_3, y_3, z_3),$$

alors

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.}$$

Le produit mixte est donc égal au déterminant des trois vecteurs écrits en lignes ou en colonnes.

3.3 Propriétés

Propriété 3.2. *Le produit mixte est trilinéaire et alterné. En particulier :*

- *il est linéaire par rapport à chacun des trois vecteurs ;*
- *l'échange de deux vecteurs change son signe ;*
- *il est nul lorsque deux vecteurs sont égaux.*

Une permutation circulaire ne change pas sa valeur :

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}].$$

Théorème 3.3. *Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0.}$$

Démonstration. Le produit mixte est le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des trois vecteurs. Il est nul si et seulement si ces vecteurs sont linéairement dépendants, ce qui équivaut à leur coplanarité dans un espace de dimension trois. □

3.4 Interprétation géométrique : volume

Considérons le parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

L'aire de sa base est $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$. La hauteur correspond à la valeur absolue de la projection de $\vec{w}$ sur une direction normale à la base.

Le volume est donc

$$\boxed{V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.}$$

Le produit mixte lui-même est un volume orienté : son signe dépend de l'orientation du triplet.

Le volume du tétraèdre construit sur les mêmes vecteurs est

$$\boxed{V_{\text{tétraèdre}} = \frac{1}{6}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|.}$$

3.5 Exemple de calcul

Considérons

$$\vec{u} = (1, 0, 2), \quad \vec{v} = (0, 3, 1), \quad \vec{w} = (2, 1, 0).$$

On calcule d'abord

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-6, -1, 3).$$

Ainsi,

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (-6, -1, 3) \cdot (2, 1, 0) = -12 - 1 = -13.$$

Les trois vecteurs ne sont pas coplanaires puisque leur produit mixte est non nul.

Le volume du parallélépipède est

$$\boxed{V = 13}$$

et celui du tétraèdre associé est

$$\boxed{V_{\text{tétraèdre}} = \frac{13}{6}.}$$

4 Liens entre produit vectoriel et produit mixte

4.1 Identité de Lagrange

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$,

$$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.}$$

Cette identité relie le produit vectoriel au produit scalaire et permet de retrouver la formule de l'aire.

4.2 Identité du double produit vectoriel

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$,

$$\boxed{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.}$$

Cette formule est parfois appelée formule du double produit vectoriel. Elle est utile pour simplifier des expressions vectorielles et établir des relations géométriques.

4.3 Déterminant et orientation

Le signe du produit mixte permet de distinguer les deux orientations possibles d'un triplet de vecteurs.

— Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] > 0$, le triplet est direct.

— Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] < 0$, le triplet est indirect.

— Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, le triplet est lié et les trois vecteurs sont coplanaires.

Cette caractérisation suppose que l'espace est muni d'une orientation et que les coordonnées sont prises dans une base orthonormée directe.

5 Applications géométriques

5.1 Calcul d'une aire à partir de coordonnées

Soient trois points A, B, C de l'espace. L'aire du triangle ABC est

$$\boxed{\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.}$$

Cette formule est particulièrement utile lorsque les coordonnées des points sont connues.

5.2 Calcul du volume d'un tétraèdre

Pour quatre points A, B, C, D, le volume du tétraèdre $ABCD$ vaut

$$\boxed{V_{ABCD} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|.}$$

Le volume est nul si et seulement si les quatre points sont coplanaires.

5.3 Équation d'un plan défini par trois points

Soient trois points non alignés A, B, C. Un vecteur normal au plan (ABC) est

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}.$$

Un point M appartient à ce plan si et seulement si

$$\boxed{\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AM} \right] = 0.}$$

Cette équation fournit une caractérisation déterminantielle du plan.

5.4 Distance d'un point à une droite

Soit la droite D passant par A et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$. Pour un point M, la distance de M à D est donnée par

$$\boxed{d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.}$$

En effet, le numérateur est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$. En le divisant par la longueur de la base, on obtient la hauteur correspondante.

6 Exercices proposés

Les exercices suivants peuvent être proposés à l'oral dans un ordre progressif, depuis le calcul algébrique jusqu'à la résolution de problèmes géométriques.

Exercice 1 – Calcul d'un produit vectoriel

Dans une base orthonormée directe, on considère

$$\vec{u} = (2, -1, 3), \qquad \vec{v} = (1, 4, -2).$$

1. Calculer $\vec{u} \times \vec{v}$.
2. Vérifier que le résultat est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.
3. Calculer l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.
4. Déterminer si les deux vecteurs sont colinéaires.

Exercice 2 – Équation d'un plan

On considère les points

$$A(1, 0, 1), \quad B(2, 1, 0), \quad C(0, 1, 2).$$

1. Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
2. Déterminer un vecteur normal au plan (ABC).
3. Établir une équation cartésienne de ce plan.
4. Déterminer si le point $D(1, 2, 1)$ appartient à ce plan.

Exercice 3 – Produit mixte et coplanarité

On considère les vecteurs

$$\vec{u} = (1, 2, 0), \quad \vec{v} = (0, 1, 1), \quad \vec{w} = (2, 0, \lambda).$$

1. Calculer $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ en fonction de λ.
2. Déterminer la valeur de λ pour laquelle les trois vecteurs sont coplanaires.
3. Interpréter le résultat à l'aide du rang de la matrice formée par les trois vecteurs.

Exercice 4 – Volume d'un tétraèdre

On considère

$$A(0, 0, 0), \quad B(1, 2, 0), \quad C(0, 1, 3), \quad D(2, 0, 1).$$

1. Calculer le produit mixte $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]$.
2. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.
3. Les quatre points sont-ils coplanaires ?

Exercice 5 – Distance d'un point à une droite

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère la droite D passant par $A(1,0,2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2,1,-1)$, ainsi que le point $M(3,2,1)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AM} \times \vec{u}$.
2. En déduire la distance $d(M, D)$.
3. Vérifier le résultat en déterminant le projeté orthogonal de M sur D.

Exercice 6 – Identité de Lagrange

Démontrer que

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u} \cdot \vec{v})^2.$$

On pourra utiliser les coordonnées dans une base orthonormée directe.

En déduire une caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs à partir du produit scalaire.

Exercice 7 – Identité du double produit vectoriel

Établir l'identité

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\vec{w}.$$

On pourra calculer les coordonnées des deux membres dans une base orthonormée directe.

Exercice 8 – Orientation et volume

Soient trois vecteurs non coplanaires $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

1. Expliquer le lien entre le signe du produit mixte et l'orientation du triplet.
2. Étudier l'effet de l'échange de deux vecteurs.
3. Étudier l'effet de la multiplication d'un vecteur par un réel négatif sur le signe du produit mixte.
4. Expliquer pourquoi le volume géométrique reste inchangé lors d'une permutation des trois vecteurs.

Exercice 9 – Synthèse géométrique

Soient quatre points A, B, C, D de l'espace. Construire une méthode permettant de :

1. vérifier si A, B, C sont alignés ;
2. déterminer si D appartient au plan (ABC) ;
3. calculer l'aire du triangle ABC ;
4. calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.

Préciser les conditions dans lesquelles chacune des formules utilisées est applicable.

7 Erreurs fréquentes et points de vigilance

— Le produit vectoriel dépend de l'orientation choisie pour l'espace. Son expression usuelle en coordonnées suppose une base orthonormée directe.

— Le produit vectoriel est antisymétrique : inverser l'ordre des deux vecteurs change le signe.

— Le produit mixte est un nombre réel, tandis que le produit vectoriel est un vecteur.

— Le produit mixte est signé. Pour calculer un volume géométrique, on prend sa valeur absolue.

— Un produit mixte nul caractérise la dépendance linéaire des trois vecteurs, et donc leur coplanarité. Il ne signifie pas nécessairement qu'un des vecteurs est nul.

— Le produit vectoriel n'est pas associatif. La formule du double produit vectoriel doit être utilisée dans l'ordre exact où elle est écrite.

— Il faut distinguer les vecteurs et les points : les formules de volume et d'aire s'appliquent aux vecteurs construits à partir des points concernés.

8 Conclusion et prolongements

Le produit vectoriel et le produit mixte complètent les outils de la géométrie vectorielle dans l'espace.

Le produit vectoriel fournit une direction normale à un plan et permet de calculer des aires. Le produit mixte exprime un déterminant, caractérise la coplanarité et donne le volume orienté d'un parallélépipède.

Ces deux opérations permettent de relier la géométrie aux calculs algébriques et matriciels. Elles interviennent également en mécanique, en géométrie analytique et dans l'étude des transformations de l'espace.

Pour une présentation orale, il est pertinent de privilégier une démonstration de l'expression coordonnée du produit vectoriel, une preuve de l'interprétation géométrique du produit mixte, puis un exercice réunissant équation de plan, coplanarité et calcul de volume.

9 Références bibliographiques

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les outils algébriques, les espaces vectoriels et les déterminants.

[2] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini. Pour les outils de calcul et leurs prolongements géométriques, notamment dans les espaces euclidiens.

[3] Marcel Berger, *Géométrie*, Nathan. Pour une approche géométrique approfondie des espaces euclidiens, des transformations et des propriétés vectorielles.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme du concours du CAPES externe de mathématiques et rapports de jury*. Consulter les programmes et rapports correspondant à la session préparée sur le site officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.

[5] Nicolas Bourbaki, *Algèbre*, chapitres consacrés aux structures algébriques et aux espaces vectoriels. Référence théorique complémentaire pour le cadre algébrique et les déterminants.