Leçon d'oral de CAPES

Homothéties et translations

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**
- 1.1 Prérequis . . . 1
- 1.2 Objectifs . . . 1

2 Translations **1**
- 2.1 Définition . . . 1
- 2.2 Expression analytique . . . 2
- 2.3 Propriétés fondamentales . . . 2
- 2.4 Composition des translations . . . 2

3 Homothéties **3**
- 3.1 Définition . . . 3
- 3.2 Expression analytique . . . 3
- 3.3 Effet sur les distances et les angles . . . 3
- 3.4 Images de droites et de cercles . . . 4
- 3.5 Homothétie réciproque . . . 4

4 Composition des homothéties **4**
- 4.1 Même centre . . . 4
- 4.2 Homothéties de centres distincts . . . 4

5 Compositions de translations et d'homothéties **5**
- 5.1 Conjugaison par une translation . . . 5
- 5.2 Homothétie et translation . . . 5

6 Applications géométriques **5**
- 6.1 Théorème de Thalès . . . 5
- 6.2 Construction du milieu d'un segment . . . 5
- 6.3 Réduction et agrandissement . . . 6
- 6.4 Résolution de problèmes de lieux . . . 6

7 Exercices **6**

8 Points de vigilance pour l'oral **7**

9 Conclusion **8**

10 Références bibliographiques **8**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose connues les notions suivantes :

— vecteurs du plan et de l'espace ;

— addition des vecteurs et multiplication d'un vecteur par un réel ;

— repérage cartésien et coordonnées des points ;

— alignement, parallélisme et rapports de longueurs ;

— notions de distance, d'angle et de figure géométrique ;

— composition et réciproque d'applications, au moins dans des situations géométriques simples.

1.2 Objectifs

L'objectif de cette leçon est de présenter deux transformations fondamentales de la géométrie affine : les translations et les homothéties.

On cherchera à :

— définir ces transformations à l'aide des vecteurs ;

— établir leurs expressions analytiques ;

— caractériser leurs invariants et leurs effets sur les longueurs, les angles, les droites et les cercles ;

— étudier leur composition et leurs transformations inverses ;

— utiliser ces outils pour résoudre des problèmes de construction, d'alignement, de parallélisme et de lieux géométriques.

Ces notions interviennent notamment dans l'étude des configurations de Thalès, des triangles semblables, des agrandissements et réductions, ainsi que dans la résolution de problèmes géométriques par coordonnées.

2 Translations

2.1 Définition

Définition 2.1. *Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan affine. La translation de vecteur $\vec{u}$ est l'application $t_{\vec{u}}$ qui, à tout point M, associe le point M' défini par*

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}.$$

Le vecteur $\vec{u}$ détermine entièrement la translation. Lorsque $\vec{u} = \vec{0}$, la translation est l'identité.

2.2 Expression analytique

Dans un repère affine, soient

$$M(x, y), \qquad \vec{u} = (a, b).$$

Si $M' = t_{\vec{u}}(M)$, alors

$$\boxed{\begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}}$$

Dans l'espace, si $\vec{u} = (a, b, c)$, on obtient

$$\boxed{(x, y, z) \longmapsto (x + a, y + b, z + c).}$$

2.3 Propriétés fondamentales

Propriété 2.2. *Une translation conserve :*

- *les distances ;*
- *les angles orientés ;*
- *l'alignement des points ;*
- *le parallélisme ;*
- *les milieux et les barycentres.*

Démonstration. Soient M, N deux points et $M' = t_{\vec{u}}(M)$, $N' = t_{\vec{u}}(N)$.

Par la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MN},$$

car $\overrightarrow{M'M} = -\vec{u}$ et $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$.

Ainsi,

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN},$$

ce qui implique notamment $M'N' = MN$. Les autres propriétés en découlent. □

Propriété 2.3. *Une translation non nulle n'a aucun point fixe. Sa réciproque est la translation de vecteur opposé :*

$$\boxed{t_{\vec{u}}^{-1} = t_{-\vec{u}}.}$$

2.4 Composition des translations

Théorème 2.4. *Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$,*

$$\boxed{t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}.}$$

Démonstration. Pour tout point M,

$$\overrightarrow{M\, t_{\vec{v}}(M)} = \vec{v}$$

et

$$\overrightarrow{t_{\vec{v}}(M)\, t_{\vec{u}}(t_{\vec{v}}(M))} = \vec{u}.$$

La relation de Chasles donne donc un déplacement total de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$. □

La composition des translations est commutative :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}.$$

3 Homothéties

3.1 Définition

Définition 3.1. *Soit O un point et soit $k \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre O et de rapport k est l'application $h_{O,k}$ définie par*

$$\boxed{\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM},}$$

où $M' = h_{O,k}(M)$.

Cas particuliers :

- $k = 1$: l'identité ;
- $k = 0$: l'application constante de valeur O ;

— $k = -1$: la symétrie centrale de centre O ;
— $k > 0$: O, M et M' sont alignés et M' est sur la même demi-droite que M ;
— $k < 0$: M' est sur la demi-droite opposée.

Pour $k \neq 0$, l'homothétie est une bijection du plan. Pour $k = 0$, elle n'est pas bijective.

3.2 Expression analytique

Dans un repère d'origine O, si $M(x, y)$ et $M' = h_{O,k}(M)$, alors

$$\boxed{\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}}$$

Dans un repère quelconque, si $O(a, b)$, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} x' = a + k(x - a), \\ y' = b + k(y - b). \end{cases}}$$

Dans l'espace, la formule analogue est

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}.$$

3.3 Effet sur les distances et les angles

Propriété 3.2. *Soient M, N deux points et leurs images M', N' par l'homothétie de rapport k. Alors*

$$\boxed{M'N' = |k|\, MN.}$$

Démonstration. On a

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{ON'} = k\overrightarrow{OM} - k\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{MN}.$$

En prenant les normes,

$$M'N' = |k|\, MN.$$

□

Propriété 3.3. *Pour $k \neq 0$, une homothétie conserve :*
— *l'alignement des points ;*
— *le parallélisme des droites ;*
— *les rapports de longueurs ;*
— *les angles géométriques non orientés.*

Elle multiplie toutes les longueurs par $|k|$ et toutes les aires par k^2.

Attention : une homothétie de rapport négatif inverse l'orientation des vecteurs, mais conserve les angles géométriques non orientés. Pour $k = 0$, ces propriétés de conservation ne s'appliquent pas en général, puisque tous les points ont la même image.

3.4 Images de droites et de cercles

Propriété 3.4. *Soit $h_{O,k}$ une homothétie avec $k \neq 0$.*
— *L'image d'une droite ne passant pas par O est une droite parallèle à la droite initiale.*
— *Une droite passant par O est globalement invariante.*
— *L'image d'un cercle de centre C et de rayon R est un cercle de centre $C' = h_{O,k}(C)$ et de rayon $|k|R$.*

Pour $k = 0$, l'image de toute figure non vide est réduite au point O.

3.5 Homothétie réciproque

Théorème 3.5. *Si $k \neq 0$, alors*

$$\boxed{h_{O,k}^{-1} = h_{O,1/k}.}$$

En effet, multiplier un vecteur par k, puis par $1/k$, redonne le vecteur initial.

4 Composition des homothéties

4.1 Même centre

Théorème 4.1. *Pour deux homothéties de même centre O,*

$$\boxed{h_{O,k} \circ h_{O,\ell} = h_{O,k\ell}.}$$

La composition de deux homothéties de même centre est donc une homothétie de ce centre, sauf si le rapport obtenu est nul, auquel cas il s'agit de l'application constante de valeur O.

En particulier,

$$h_{O,k} \circ h_{O,1/k} = \mathrm{Id} \qquad (k \neq 0).$$

4.2 Homothéties de centres distincts

Soient A et B deux points et k, ℓ deux réels. Pour tout point M, la composée $h_{A,k} \circ h_{B,\ell}$ vérifie

$$\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AB} + k\ell\overrightarrow{BM}.$$

Si $k\ell \neq 1$, cette composée est une homothétie de rapport $k\ell$, dont le centre C vérifie

$$\overrightarrow{AC} = \frac{k}{1-k\ell}\overrightarrow{AB}.$$

Si $k\ell = 1$, la composée est une translation de vecteur

$$\boxed{(1-k)\overrightarrow{AB}.}$$

Ces formules montrent que la composition de deux homothéties de centres distincts est une homothétie ou une translation, selon le produit des rapports.

5 Compositions de translations et d'homothéties

5.1 Conjugaison par une translation

Pour tout vecteur $\vec{u}$ et tout réel k,

$$\boxed{t_{\vec{u}} \circ h_{O,k} = h_{O',k} \circ t_{\vec{u}},}$$

où $O' = t_{\vec{u}}(O)$.

Cette relation exprime le fait qu'une translation déplace le centre d'une homothétie sans modifier son rapport.

5.2 Homothétie et translation

Dans un repère d'origine O, une homothétie de rapport k suivie d'une translation de vecteur $\vec{u}$ s'écrit

$$M \longmapsto k\overrightarrow{OM} + \vec{u},$$

en identifiant les points et leurs vecteurs-position.

Si $k \neq 1$, cette application est une homothétie de rapport k dont le centre a pour vecteur-position

$$\boxed{\frac{\vec{u}}{1-k}.}$$

Si $k = 1$, on retrouve une translation.

Cette observation est utile pour reconnaître une transformation à partir de son expression analytique.

6 Applications géométriques

6.1 Théorème de Thalès

Les homothéties fournissent une interprétation géométrique du théorème de Thalès.

Soient deux droites sécantes en O et deux points A, B sur la première, A', B' sur la seconde, avec

$$\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}, \qquad \overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}.$$

Alors les triangles OAB et $OA'B'$ sont homothétiques et

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{A'B'}{AB} = |k|,$$

lorsque les dénominateurs sont non nuls.

On retrouve ainsi une configuration classique de Thalès.

6.2 Construction du milieu d'un segment

Soient A et B deux points distincts et I le milieu de $[AB]$. La relation

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

montre que I est l'image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$.

6.3 Réduction et agrandissement

Une homothétie de rapport k transforme une figure en une figure semblable :

— si $|k| > 1$, il s'agit d'un agrandissement ;

— si $0 < |k| < 1$, il s'agit d'une réduction ;

— si $k < 0$, l'image se situe de l'autre côté du centre.

Les périmètres sont multipliés par $|k|$ et les aires par k^2.

6.4 Résolution de problèmes de lieux

Considérons un point M qui décrit une droite d. L'ensemble des images $h_{O,k}(M)$, pour $k \neq 0$, décrit la droite image $h_{O,k}(d)$, parallèle à d si $O \notin d$.

De même, l'image d'un cercle par une homothétie non dégénérée est un cercle. Ces propriétés permettent de transformer des problèmes de lieux en problèmes portant sur des figures plus simples.

7 Exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés à l'oral ou servir de support à une préparation écrite. Ils couvrent les définitions, les propriétés, les compositions et les applications.

Exercice 1 – Translation et coordonnées

Dans un repère orthonormé, on considère $A(1,2)$, $B(4,-1)$ et la translation de vecteur $\vec{u} = (-2,3)$.

a) Déterminer les coordonnées des images de A et B.

b) Vérifier que la distance entre les deux images est égale à AB.

c) Déterminer l'image de la droite (AB).

Exercice 2 – Homothétie et coordonnées

Soit l'homothétie de centre $O(2,-1)$ et de rapport -2. On considère les points $A(3,1)$ et $B(-1,2)$.

a) Calculer les coordonnées de A' et B'.

b) Vérifier que $A'B' = 2AB$.

c) Déterminer les coordonnées du milieu de $[AB]$ et vérifier que son image est le milieu de $[A'B']$.

Exercice 3 – Composition de translations

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a) Démontrer que $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$.

b) Déterminer la condition nécessaire et suffisante pour que cette composée soit l'identité.

c) Interpréter géométriquement le résultat.

Exercice 4 – Image d'un cercle

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon 3. On applique l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle image.

b) Comparer les périmètres des deux cercles.

c) Comparer leurs aires.

Exercice 5 – Composition d'homothéties

Soient deux homothéties $h_{A,k}$ et $h_{B,\ell}$, avec $A \neq B$ et $k\ell \neq 1$.

a) Montrer que leur composée est une homothétie.

b) Déterminer son rapport et son centre.

c) Étudier le cas particulier $k\ell = 1$.

Exercice 6 – Théorème de Thalès

Soit un triangle ABC. On considère un réel k et les points B' et C' définis par

$$\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}, \qquad \overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC}.$$

a) Montrer que $(B'C')$ est parallèle à (BC) si $k \neq 0$.

b) Établir les relations entre les longueurs des côtés.

c) Expliquer le lien entre cette construction et le théorème de Thalès.

Exercice 7 – Reconnaître une transformation

Dans un repère, une application f est définie par

$$f(x, y) = (2x + 3,\ 2y - 1).$$

a) Montrer que f est une homothétie.

b) Déterminer son rapport et son centre.

c) Calculer les coordonnées du point fixe éventuel.

Exercice 8 – Problème de synthèse

Soit un triangle ABC et un réel $k \neq 0$. On définit

$$B' = h_{A,k}(B), \qquad C' = h_{A,k}(C).$$

a) Démontrer que les triangles ABC et $AB'C'$ sont semblables.

b) Étudier l'évolution des longueurs, des périmètres et des aires en fonction de k.

c) Discuter les cas $k = 1$, $k = -1$ et $k = 0$.

d) Proposer une construction géométrique de B' et C' à la règle et au compas lorsque le rapport est constructible.

8 Points de vigilance pour l'oral

Lors de la présentation, il convient de distinguer clairement :

— une translation, qui conserve toutes les distances ;

— une homothétie de rapport k, qui multiplie les distances par $|k|$;

— le rapport signé k et le coefficient positif $|k|$ intervenant dans les longueurs ;

— les cas particuliers $k = 0$ et $k = 1$;

— l'image d'une droite et celle d'un cercle ;

— la composition de transformations et la recherche éventuelle de leur centre.

Il est utile d'accompagner les démonstrations de figures géométriques et de faire expliciter les relations vectorielles avant de passer aux coordonnées.

9 Conclusion

Les translations et les homothéties sont deux transformations fondamentales permettant de déplacer ou de redimensionner les figures géométriques.

Les translations conservent les distances et les angles, tandis que les homothéties conservent les angles géométriques et les rapports de longueurs, tout en multipliant les distances par la valeur absolue de leur rapport.

Leur expression vectorielle facilite les démonstrations, leur expression analytique permet les calculs et leurs compositions conduisent à des transformations plus générales. Elles constituent ainsi des outils essentiels pour l'étude des configurations de Thalès, des figures semblables et des problèmes de construction.

10 Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres I et VI. Référence historique pour les fondements de la géométrie et les configurations de proportionnalité.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, CEDIC/Fernand Nathan. Ouvrage de référence pour la géométrie affine et euclidienne.

[3] Michèle Audin, *Géométrie*, EDP Sciences. Présentation des transformations géométriques et des outils vectoriels.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Référence institutionnelle pour les notions de vecteurs, de transformations du plan et de géométrie.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Épreuves du CAPES externe de mathématiques : programme et rapports de jury*. Documents institutionnels à consulter dans leur version correspondant à la session préparée.