Leçon : Isométries planes

Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Introduction et problématique **2**

3 Définition et premières propriétés **2**

3.1 Conséquences immédiates 2

4 Caractérisation analytique des isométries **3**

4.1 Expression vectorielle 3

4.2 Orientation 4

5 Les isométries directes **4**

5.1 Les translations 4

5.2 Les rotations 4

5.3 Classification des isométries directes 4

6 Les isométries indirectes **5**

6.1 Les symétries axiales 5

6.2 Les symétries glissées 5

6.3 Classification des isométries indirectes 5

7 Théorème de classification **6**

8 Composition des isométries **6**

8.1 Composée de deux symétries axiales 6

8.2 Composition et nature du résultat 6

9 Applications et exemples **7**

9.1 Reconnaître une isométrie à partir de trois points 7

9.2 Recherche de points fixes 7

9.3 Exemple de pavage 7

10 Exercices proposés **7**

10.1 Exercice 1 : reconnaître une isométrie 7
10.2 Exercice 2 : déterminer une transformation 7
10.3 Exercice 3 : rotation 8
10.4 Exercice 4 : symétrie axiale 8
10.5 Exercice 5 : symétrie glissée 8
10.6 Exercice 6 : composition de symétries 8
10.7 Exercice 7 : déterminer une isométrie 8
10.8 Exercice 8 : lieu géométrique 9
10.9 Exercice 9 : problème de synthèse 9

11 Éléments de correction **9**

12 Conclusion **10**

13 Références bibliographiques **11**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de distance euclidienne, de vecteur, de repère orthonormé, de produit scalaire et de coordonnées dans le plan. Les propriétés élémentaires des triangles, des angles, des cercles et des parallélogrammes sont également nécessaires. On pourra mobiliser les notions de transformation géométrique, de composition d'applications et de matrice orthogonale.

Objectifs. L'objectif principal est de caractériser les transformations du plan qui conservent les distances, puis de les classer. Il s'agit de distinguer les isométries directes des isométries indirectes, de reconnaître les translations, rotations, symétries axiales et symétries glissées, et d'étudier leurs propriétés ainsi que leur composition. La leçon vise aussi à faire le lien entre géométrie synthétique, calcul vectoriel et écriture analytique des transformations. Enfin, les exercices doivent permettre de mobiliser ces résultats dans des problèmes de construction, de lieux géométriques et de configurations de points.

2 Introduction et problématique

Une isométrie plane est une transformation qui conserve les distances entre les points. Elle conserve donc les longueurs, les angles non orientés, l'alignement et les cercles. Elle constitue un outil fondamental de la géométrie euclidienne.

Les isométries interviennent dans les problèmes de superposition de figures, de construction géométrique et d'étude des symétries. Elles sont également essentielles dans l'étude des pavages et des motifs périodiques.

La problématique de la leçon est la suivante :

Comment caractériser et classifier toutes les transformations du plan qui conservent les distances ?

Le résultat central est que toute isométrie du plan euclidien est une translation, une rotation, une symétrie axiale ou une symétrie glissée. L'identité est un cas particulier de translation, et une symétrie axiale est un cas particulier d'isométrie indirecte.

3 Définition et premières propriétés

Définition 1. *Une* isométrie plane *est une application bijective $f : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ désigne le plan euclidien, telle que, pour tous points A, B,*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B).$$

La bijectivité peut aussi être déduite de la seule conservation des distances pour une application définie sur tout le plan euclidien : une telle application est nécessairement surjective et injective.

3.1 Conséquences immédiates

Si f est une isométrie, alors :

- les longueurs des segments sont conservées ;
- les triangles sont envoyés sur des triangles isométriques ;
- l'alignement et le parallélisme sont conservés ;

— les angles non orientés sont conservés ;
— un cercle de centre O et de rayon r est envoyé sur un cercle de centre $f(O)$ et de rayon r ;
— les milieux sont conservés.

Proposition 1. *La composée de deux isométries est une isométrie. L'application réciproque d'une isométrie est également une isométrie.*

Démonstration. Soient f et g deux isométries. Pour tous points A, B,

$$\begin{aligned} d((g \circ f)(A), (g \circ f)(B)) &= d(g(f(A)), g(f(B))) \\ &= d(f(A), f(B)) \\ &= d(A, B). \end{aligned}$$

La composée conserve donc les distances. Puisque f et g sont bijectives, leur composée l'est également.

Pour l'application réciproque, on pose $X = f(A)$ et $Y = f(B)$. Alors

$$d(f^{-1}(X), f^{-1}(Y)) = d(A, B) = d(X, Y).$$

Ainsi, f^{-1} est une isométrie. □

4 Caractérisation analytique des isométries

4.1 Expression vectorielle

Théorème 1. *Toute isométrie f du plan s'écrit sous la forme*

$$f(M) = A + u(\overrightarrow{OM}),$$

où O est une origine fixée, A est un vecteur fixe et u est une application linéaire orthogonale. Autrement dit, u conserve le produit scalaire.

Démonstration. Fixons un point O et posons $A = f(O)$. Considérons l'application

$$g(M) = \overrightarrow{Af(M)}.$$

Comme f conserve les distances,

$$\|g(M)\| = \|\overrightarrow{OM}\|.$$

De plus, pour tous M, N, l'identité de polarisation donne

$$g(M) \cdot g(N) = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}.$$

On peut montrer, en utilisant ces égalités et le fait que les images de deux vecteurs de base orthonormée forment une base orthonormée, que g est linéaire et orthogonale. Ainsi,

$$\overrightarrow{Af(M)} = u(\overrightarrow{OM}),$$

d'où le résultat. □

Dans un repère orthonormé, toute isométrie s'écrit donc

$$X' = QX + b,$$

où Q est une matrice orthogonale, c'est-à-dire

$$Q^{\mathsf{T}} Q = I_2,$$

et b est un vecteur constant.

Les matrices orthogonales de dimension 2 vérifient

$$\det(Q) \in \{-1, 1\}.$$

4.2 Orientation

Définition 2. *Une isométrie est dite* directe *si elle conserve l'orientation du plan, et* indirecte *si elle inverse l'orientation.*

Dans l'écriture précédente, on a :

$$\begin{cases} \det(Q) = 1 & \text{si } f \text{ est directe,} \\ \det(Q) = -1 & \text{si } f \text{ est indirecte.} \end{cases}$$

Cette distinction permet d'obtenir la classification des isométries planes.

5 Les isométries directes

5.1 Les translations

Définition 3. *Soit $\vec{u}$ un vecteur. La translation $t_{\vec{u}}$ est définie par*

$$\overrightarrow{Mt_{\vec{u}}(M)} = \vec{u}.$$

Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (a, b)$, alors

$$t_{\vec{u}}(x, y) = (x + a, y + b).$$

Une translation conserve les distances et l'orientation. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, elle ne possède aucun point fixe. La translation de vecteur nul est l'identité.

5.2 Les rotations

Définition 4. *Soient O un point et θ un angle orienté. La rotation $r_{O,\theta}$ de centre O et d'angle θ est l'isométrie qui fixe O et transforme tout point M en un point M' tel que*

$$OM' = OM, \qquad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta \pmod{2\pi}.$$

Dans un repère orthonormé direct d'origine O, la rotation s'écrit

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Si $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, le centre O est l'unique point fixe. Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, la rotation est l'identité.

5.3 Classification des isométries directes

Théorème 2. *Toute isométrie directe du plan est une translation ou une rotation. L'identité est incluse parmi les translations et peut également être considérée comme une rotation d'angle nul.*

Démonstration. La partie linéaire Q d'une isométrie directe est une matrice orthogonale de déterminant 1. Elle est donc de la forme

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

L'isométrie s'écrit alors $f(X) = QX + b$.

Si $Q = I_2$, alors f est une translation. Sinon, $I_2 - Q$ est inversible, car 1 n'est pas une valeur propre réelle de la rotation non triviale. Il existe donc un unique point O tel que $f(O) = O$. L'isométrie est alors la rotation de centre O associée à Q. □

6 Les isométries indirectes

6.1 Les symétries axiales

Définition 5. *Soit d une droite du plan. La symétrie axiale s_d est la transformation qui fixe chaque point de d et échange les deux points symétriques par rapport à d.*

La symétrie axiale conserve les distances et inverse l'orientation. Elle est involutive :

$$s_d \circ s_d = \mathrm{Id}\,.$$

Dans un repère orthonormé adapté à un axe horizontal, elle s'écrit

$$s(x, y) = (x, -y).$$

Sa matrice linéaire est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

dont le déterminant vaut -1.

6.2 Les symétries glissées

Définition 6. *Une symétrie glissée est la composée d'une symétrie axiale d'axe d et d'une translation de vecteur $\vec{u}$ parallèle à d.*

La symétrie glissée s'écrit

$$g = t_{\vec{u}} \circ s_d, \qquad \vec{u} \parallel d.$$

Elle conserve les distances et inverse l'orientation. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, elle ne possède aucun point fixe.

Dans un repère où l'axe d est l'axe des abscisses, elle s'écrit

$$g(x, y) = (x + a, -y), \qquad a \neq 0.$$

Si $a = 0$, on retrouve une symétrie axiale.

6.3 Classification des isométries indirectes

Théorème 3. *Toute isométrie indirecte du plan est une symétrie axiale ou une symétrie glissée.*

Démonstration. La partie linéaire Q est orthogonale et vérifie $\det(Q) = -1$. Une telle matrice possède les valeurs propres 1 et -1 et correspond à une réflexion vectorielle par rapport à une droite vectorielle.

Dans un repère orthonormé convenablement choisi, l'isométrie s'écrit

$$f(x, y) = (x + a, -y).$$

Si $a = 0$, c'est une symétrie axiale. Si $a \neq 0$, c'est une symétrie glissée d'axe parallèle à l'axe des abscisses. □

7 Théorème de classification

Théorème 4 (Classification des isométries planes)**.** *Toute isométrie du plan euclidien appartient à l'une des catégories suivantes :*

1. *l'identité ;*
2. *une translation non triviale ;*
3. *une rotation non triviale ;*
4. *une symétrie axiale ;*
5. *une symétrie glissée non triviale.*

Les trois premières sont directes ; les deux dernières sont indirectes.

On peut résumer la classification à l'aide du tableau suivant.

Transformation	Orientation	Points fixes
Identité	Directe	Tous les points
Translation non triviale	Directe	Aucun
Rotation non triviale	Directe	Un centre
Symétrie axiale	Indirecte	Une droite
Symétrie glissée non triviale	Indirecte	Aucun

Ce tableau constitue un outil pratique pour reconnaître une isométrie à partir de ses points fixes et de son action sur l'orientation.

8 Composition des isométries

8.1 Composée de deux symétries axiales

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes en O. La composée des symétries axiales d'axes d_1 et d_2 est une rotation de centre O et d'angle égal au double de l'angle orienté de d_1 vers d_2 :

$$s_{d_2} \circ s_{d_1} = r_{O,\,2\theta},$$

où θ est l'angle orienté entre les deux axes.

Si les droites d_1 et d_2 sont parallèles, leur composée est une translation. Le vecteur de cette translation est perpendiculaire aux axes et sa norme est égale au double de la distance entre ces axes.

Si les axes sont confondus, la composée est l'identité.

8.2 Composition et nature du résultat

La composition de deux isométries directes est directe. La composition de deux isométries indirectes est directe. La composition d'une isométrie directe et d'une isométrie indirecte est indirecte.

Cela résulte de la multiplication des déterminants des parties linéaires :

$$\det(Q_2 Q_1) = \det(Q_2)\det(Q_1).$$

La composition permet ainsi de construire de nouvelles isométries et de résoudre certains problèmes géométriques en remplaçant plusieurs transformations par une seule.

9 Applications et exemples

9.1 Reconnaître une isométrie à partir de trois points

Soient A, B, C trois points non alignés et A', B', C' trois points tels que

$$AB = A'B', \quad AC = A'C', \quad BC = B'C'.$$

Il existe une unique isométrie envoyant respectivement A, B, C sur A', B', C'.

La nature de cette isométrie dépend notamment de la conservation ou de l'inversion de l'orientation des deux triangles.

9.2 Recherche de points fixes

Pour une isométrie donnée par

$$f(x, y) = Q \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix},$$

les points fixes sont les solutions du système

$$(I_2 - Q) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

L'étude de ce système permet de distinguer une rotation d'une translation parmi les isométries directes, ou une symétrie axiale d'une symétrie glissée parmi les isométries indirectes.

9.3 Exemple de pavage

Les translations, rotations et symétries permettent de construire des motifs répétitifs. L'étude des isométries qui laissent invariant un motif constitue une introduction aux groupes de symétries et aux pavages du plan.

10 Exercices proposés

Les exercices suivants sont classés selon les compétences qu'ils permettent de travailler. Ils peuvent être utilisés pour préparer une présentation orale ou pour illustrer une séance d'enseignement.

10.1 Exercice 1 : reconnaître une isométrie

Soit f une isométrie plane qui fixe deux points distincts A et B.

a) Montrer que f fixe tous les points de la droite (AB).
b) Montrer que f est l'identité ou la symétrie axiale d'axe (AB).
c) Interpréter ce résultat à l'aide de la classification.

10.2 Exercice 2 : déterminer une transformation

Dans un repère orthonormé, on considère

$$f(x, y) = (x + 3, y).$$

a) Montrer que f est une isométrie.
b) Donner sa nature et son vecteur.
c) Déterminer ses points fixes.
d) Calculer $f^n(x, y)$ pour tout entier naturel n.

10.3 Exercice 3 : rotation

Dans un repère orthonormé direct, on considère

$$f(x, y) = (-y, x).$$

a) Montrer que f conserve les distances.
b) Identifier la nature et les paramètres de f.
c) Déterminer les images des points $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ et $C(1, 1)$.
d) Calculer f^2 et f^4.

10.4 Exercice 4 : symétrie axiale

On considère l'application

$$f(x, y) = (x, -y).$$

a) Vérifier que f est une isométrie.
b) Déterminer son axe et ses points fixes.
c) Montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}$.
d) Déterminer l'image du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 4$.

10.5 Exercice 5 : symétrie glissée

On considère

$$g(x, y) = (x + 2, -y).$$

a) Montrer que g est une isométrie indirecte.
b) Déterminer si g possède des points fixes.
c) Écrire g comme composée d'une translation et d'une symétrie axiale.
d) Calculer g^2 et interpréter le résultat.

10.6 Exercice 6 : composition de symétries

Soient d_1 et d_2 deux droites sécantes en O, formant un angle orienté θ.

a) Démontrer que $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ est une rotation de centre O.
b) Déterminer son angle.
c) Étudier le cas où $\theta = \pi/4$.
d) Étudier le cas où les droites sont parallèles.

10.7 Exercice 7 : déterminer une isométrie

Soient A, B, C trois points non alignés et A', B', C' trois points tels que les triangles ABC et $A'B'C'$ soient isométriques.

a) Justifier l'existence et l'unicité de l'isométrie qui envoie A, B, C sur A', B', C'.
b) Expliquer comment déterminer si elle est directe ou indirecte.
c) Donner un exemple où cette isométrie est une symétrie axiale.

10.8 Exercice 8 : lieu géométrique

Soient A et B deux points distincts du plan. On considère l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{M \mid MA = MB\}.$$

a) Déterminer la nature géométrique de $\mathcal{E}$.
b) Relier ce lieu à une symétrie axiale.
c) Expliquer comment une isométrie permet de caractériser cet ensemble.

10.9 Exercice 9 : problème de synthèse

Soient A, B, C trois points non alignés. On considère les symétries axiales $s_{(AB)}$ et $s_{(AC)}$.

a) Déterminer la nature de $s_{(AC)} \circ s_{(AB)}$.
b) Déterminer son centre et son angle.
c) En déduire une méthode de construction de l'image d'un point M par cette composée.
d) Expliquer le rôle de cet exercice dans la classification des isométries.

11 Éléments de correction

Exercice 1

Pour tout point M, les égalités $MA = f(M)A$ et $MB = f(M)B$ montrent que M et $f(M)$ sont à égale distance de A et de B. Ils appartiennent donc à un même cercle de centre A et de rayon AM, ainsi qu'à un même cercle de centre B et de rayon BM. Plus simplement, la conservation des distances à A et à B impose que $f(M)$ soit M ou son symétrique par rapport à (AB). La classification, ou la détermination d'une isométrie par trois points non alignés, conduit à l'identité ou à la symétrie d'axe (AB).

Exercice 2

La différence entre les images de deux points est égale à la différence de leurs coordonnées initiales. Ainsi, les distances sont conservées. La transformation est la translation de vecteur $(3, 0)$. Elle n'a aucun point fixe, et

$$f^n(x, y) = (x + 3n, y).$$

Exercice 3

On a

$$(-y)^2 + x^2 = x^2 + y^2.$$

La transformation est la rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. On obtient

$$f^2(x, y) = (-x, -y), \qquad f^4(x, y) = (x, y).$$

Exercice 4

La transformation est la symétrie axiale d'axe l'axe des abscisses. Ses points fixes sont les points $(x, 0)$. Elle est involutive et laisse invariant le cercle $x^2 + y^2 = 4$.

Exercice 5

La partie linéaire de g est la réflexion $(x, y) \mapsto (x, -y)$, de déterminant -1. La transformation est une symétrie glissée d'axe parallèle à l'axe des abscisses. Elle n'a aucun point fixe puisque les équations $x = x + 2$ et $y = -y$ ne peuvent pas être satisfaites simultanément. Enfin,

$$g^2(x, y) = (x + 4, y).$$

Le carré de cette symétrie glissée est donc la translation de vecteur $(4, 0)$.

Exercice 6

La composée de deux symétries axiales d'axes sécants est une rotation de centre leur point d'intersection. Son angle est le double de l'angle orienté entre les axes. Si cet angle vaut $\pi/4$, la rotation a pour angle $\pi/2$. Lorsque les axes sont parallèles et distincts, la composée est une translation.

Exercice 7

L'application qui envoie les trois sommets non alignés sur les trois sommets correspondants est unique, car une isométrie est déterminée par l'image de trois points non alignés. Le signe de l'orientation du triangle permet de distinguer une isométrie directe d'une isométrie indirecte.

Exercice 8

L'ensemble $\mathcal{E}$ est la médiatrice du segment $[AB]$. En effet, un point est équidistant de A et de B si et seulement s'il appartient à cette droite. Celle-ci est l'axe de la symétrie qui échange A et B.

Exercice 9

Les droites (AB) et (AC) se coupent en A. La composée est donc une rotation de centre A et d'angle égal au double de l'angle orienté de (AB) vers (AC). On construit l'image de M en conservant la distance à A et en reportant l'angle de rotation.

12 Conclusion

Les isométries planes sont les transformations qui préservent la structure métrique du plan euclidien. Leur classification repose sur deux critères essentiels : la conservation ou l'inversion de l'orientation, et l'existence éventuelle de points fixes.

Les isométries directes sont les translations et les rotations, tandis que les isométries indirectes sont les symétries axiales et les symétries glissées. Cette classification se comprend aussi bien par les arguments de géométrie synthétique que par l'étude des matrices orthogonales.

La composition des isométries permet enfin de résoudre des problèmes géométriques et ouvre la voie à l'étude des groupes de transformations, des pavages et des symétries des figures.

13 Références bibliographiques

Références

[1] M. Berger, *Géométrie*, tome 1, Cedic, 1977. Ouvrage de référence pour la géométrie euclidienne, les transformations et leurs propriétés.

[2] M. Audin, *Géométrie*, ouvrage de géométrie destiné à l'enseignement supérieur. À consulter pour approfondir les approches analytiques et synthétiques de la géométrie.

[3] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, Wiley. Ouvrage classique consacré à la géométrie euclidienne, aux transformations et aux configurations géométriques.

[4] Euclide, *Les Éléments*, livres I et IV. Référence historique pour les fondements de la géométrie euclidienne et les constructions géométriques.