Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Similitudes planes

Géométrie euclidienne, transformations et nombres complexes

Table des matières

1 Introduction et problématique **1**

2 Prérequis et objectifs **1**
2.1 Prérequis 1
2.2 Objectifs 1

3 Définition et propriétés générales **2**
3.1 Similitudes et figures semblables 2

4 Similitudes directes et indirectes **2**
4.1 Similitudes directes 2
4.2 Similitudes indirectes 3

5 Écritures matricielles **3**

6 Centre et classification des similitudes directes **3**
6.1 Cas $a = 1$ 3
6.2 Cas $a \neq 1$ 3

7 Composition des similitudes **4**

8 Applications géométriques **4**
8.1 Construction d'un triangle semblable 4
8.2 Recherche d'un lieu géométrique 4
8.3 Problèmes de concours 5

9 Exercices **5**

10 Éléments de conclusion **6**

11 Références bibliographiques et institutionnelles **6**

1 Introduction et problématique

Les similitudes planes constituent une famille fondamentale de transformations géométriques. Elles généralisent les isométries en autorisant un changement d'échelle, tout en conservant les angles non orientés et les rapports de longueurs.

Elles permettent d'étudier dans un cadre unifié les rotations, les translations, les homothéties et les transformations composées de ces applications. L'utilisation des nombres complexes fournit une caractérisation particulièrement efficace des similitudes directes et facilite la résolution de nombreux problèmes de construction et de recherche de lieux géométriques.

La problématique de cette leçon est la suivante : *comment caractériser les transformations qui conservent la forme des figures, et comment exploiter leurs propriétés géométriques et analytiques ?*

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les prérequis nécessaires sont :

— les vecteurs du plan, les repères et les coordonnées ;

— les isométries planes : translations, rotations, symétries axiales ;

— les homothéties et leurs propriétés ;

— les angles orientés et les rapports de longueurs ;

— les nombres complexes : module, argument, forme algébrique et forme exponentielle ;

— les applications affines et les matrices de transformations du plan.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on doit être capable :

— de définir et caractériser une similitude plane ;

— de distinguer les similitudes directes et indirectes ;

— de déterminer le rapport, le centre et l'angle d'une similitude ;

— d'utiliser les écritures complexes et matricielles ;

— de composer des similitudes et d'étudier leurs invariants ;

— de résoudre des problèmes géométriques faisant intervenir des configurations semblables ;

— de relier les propriétés théoriques aux programmes d'enseignement et à des situations de construction.

3 Définition et propriétés générales

Définition 1. *Une similitude plane est une application bijective f du plan dans lui-même pour laquelle il existe un réel $k > 0$ tel que, pour tous points A et B,*

$$f(A)f(B) = k\,AB.$$

Le réel k est appelé ***rapport de la similitude****.*

Lorsque $k = 1$, la similitude est une isométrie. Lorsque $k \neq 1$, elle modifie les longueurs tout en conservant leurs rapports.

Propriété 1. *Une similitude conserve :*

— *l'alignement et le parallélisme ;*

— *les angles non orientés ;*

— *les rapports de longueurs ;*

— *l'orthogonalité ;*

— *la nature des figures : un triangle est envoyé sur un triangle semblable, un cercle sur un cercle.*

Les longueurs sont multipliées par k, les aires par k^2.

Propriété 2. *La composée de deux similitudes de rapports k_1 et k_2 est une similitude de rapport k_1k_2. L'application réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $1/k$.*

3.1 Similitudes et figures semblables

Deux figures sont dites semblables lorsqu'une similitude transforme l'une en l'autre. Deux triangles non dégénérés sont semblables si et seulement si leurs angles sont égaux deux à deux, ou, de manière équivalente, si leurs côtés homologues sont proportionnels.

Cette propriété constitue un lien essentiel entre les transformations géométriques et les théorèmes de géométrie classique.

4 Similitudes directes et indirectes

Définition 2. *Une similitude est dite* ***directe*** *si elle conserve l'orientation du plan. Elle est dite* ***indirecte*** *si elle renverse l'orientation.*

4.1 Similitudes directes

Une similitude directe peut être obtenue comme composée d'une homothétie de rapport positif et d'une isométrie directe. Elle conserve les angles orientés.

Théorème 1. *Toute similitude directe du plan, dans un repère orthonormé direct, admet une écriture complexe de la forme*

$$z' = az + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $|a|$ *et son angle est* $\arg(a)$ *modulo* 2π.

En effet, pour deux points d'affixes z_1 et z_2,

$$z'_1 - z'_2 = a(z_1 - z_2),$$

donc

$$|z'_1 - z'_2| = |a|\,|z_1 - z_2|.$$

L'argument de a donne la variation des angles orientés.

4.2 Similitudes indirectes

Une similitude indirecte s'écrit, dans un repère orthonormé,

$$z' = a\overline{z} + b, \qquad a \in \mathbb{C}^*, \quad b \in \mathbb{C}.$$

Son rapport est $|a|$. La conjugaison complexe intervient dans l'inversion de l'orientation.

Exemple 1. *L'application* $z \mapsto 2\overline{z}$ *est une similitude indirecte de rapport* 2. *Elle est la composée d'une homothétie de rapport* 2 *et d'une symétrie par rapport à l'axe réel.*

5 Écritures matricielles

Dans un repère orthonormé, une similitude directe de rapport k et d'angle θ a pour partie linéaire la matrice

$$k\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Une similitude indirecte peut être représentée par la matrice

$$k\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, les colonnes de la matrice sont orthogonales et de même norme k. Par conséquent, la partie linéaire multiplie toutes les longueurs par k.

Le déterminant vaut k^2 pour une similitude directe et $-k^2$ pour une similitude indirecte. Son signe permet donc de distinguer les deux types de transformations.

6 Centre et classification des similitudes directes

Considérons une similitude directe d'écriture complexe

$$z' = az + b.$$

6.1 Cas $a = 1$

Si $a = 1$, alors

$$z' = z + b.$$

Il s'agit d'une translation, qui est une isométrie directe.

Si $b = 0$, l'application est l'identité.

6.2 Cas $a \neq 1$

Le point fixe éventuel a pour affixe ω vérifiant

$$\omega = a\omega + b.$$

On obtient

$$\boxed{\omega = \frac{b}{1-a}}.$$

En prenant ce point comme origine, l'écriture devient

$$z' - \omega = a(z - \omega).$$

On distingue alors plusieurs cas.

— Si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, la transformation est une rotation de centre ω et d'angle $\arg(a)$.

— Si $a \in \mathbb{R}^*$, la transformation est une homothétie de centre ω et de rapport a. Pour $a < 0$, elle est aussi une rotation d'angle π.

— Si $|a| \neq 1$ et a n'est pas réel, la transformation est une similitude directe à centre ω, de rapport $|a|$ et d'angle $\arg(a)$.

Ainsi, toute similitude directe autre qu'une translation possède un unique point fixe.

7 Composition des similitudes

Soient

$$f(z) = az + b, \qquad g(z) = cz + d.$$

Alors

$$(g \circ f)(z) = ca\, z + cb + d.$$

La similitude composée est directe, son rapport est $|a||c|$ et son angle est

$$\arg(a) + \arg(c) \pmod{2\pi}.$$

En particulier :

— la composée de deux translations est une translation ;

— la composée de deux rotations peut être une rotation ou une translation ;

— la composée de deux homothéties de centres distincts est généralement une similitude directe ;

— deux similitudes directes de même centre se composent en une similitude directe de même centre, sauf dans les cas où la composée est l'identité.

La composition constitue un outil puissant pour établir des résultats de géométrie, notamment lorsque plusieurs triangles semblables apparaissent dans une même configuration.

8 Applications géométriques

8.1 Construction d'un triangle semblable

Soit ABC un triangle et A' un point donné. Pour construire un triangle $A'B'C'$ directement semblable à ABC, de rapport k et d'angle θ, on peut utiliser une similitude directe de centre A' lorsque cette construction est compatible avec les données.

Les affixes vérifient alors

$$b' - a' = ke^{i\theta}(b - a), \qquad c' - a' = ke^{i\theta}(c - a).$$

Ces relations traduisent simultanément la conservation des angles orientés et la proportionnalité des longueurs.

8.2 Recherche d'un lieu géométrique

Soit M un point variable d'affixe z et M' son image par la similitude

$$z' = az + b.$$

Si M décrit une droite, un cercle ou une autre courbe, son image est obtenue en appliquant cette relation aux coordonnées complexes. Une droite est transformée en droite et un cercle en cercle.

La méthode consiste à traduire l'équation du lieu initial, puis à éliminer z ou à exprimer directement les coordonnées de l'image.

8.3 Problèmes de concours

Les similitudes permettent notamment :

— de comparer des triangles construits sur les côtés d'un triangle donné ;

— de déterminer des points à partir de rapports de longueurs et d'angles ;

— d'étudier les centres et les axes de figures ;

— de transformer une configuration complexe en une configuration plus simple.

Le choix entre une approche synthétique et une approche complexe dépend des données et de la conclusion recherchée.

9 Exercices

Exercice 1 – Reconnaissance d'une similitude

Dans le plan complexe, on considère l'application

$$f(z) = (1 + i)z + 2 - i.$$

1. Déterminer son rapport et son angle.
2. Déterminer son centre.
3. Décrire géométriquement la transformation.
4. Calculer l'image du point d'affixe $1 + i$.

Exercice 2 – Similitude indirecte

On considère

$$f(z) = 2\overline{z} + 1 - i.$$

1. Montrer que f est une similitude indirecte.
2. Déterminer son rapport.
3. Déterminer ses points fixes.
4. Identifier une décomposition en transformations usuelles.

Exercice 3 – Composition

Soient les applications

$$f(z) = iz + 1, \qquad g(z) = (1+i)z - 2.$$

1. Déterminer l'écriture complexe de $g \circ f$.
2. Calculer son rapport et son angle.
3. Déterminer son centre.
4. Comparer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 4 – Triangles semblables

Soit ABC un triangle non dégénéré et $A'B'C'$ un triangle directement semblable à ABC. On note a, b, c et a', b', c' les affixes respectives des sommets.

1. Établir qu'il existe $u \in \mathbb{C}^*$ et $v \in \mathbb{C}$ tels que

$$a' = ua + v, \quad b' = ub + v, \quad c' = uc + v.$$

2. Interpréter $|u|$ et $\arg(u)$.
3. Déterminer u et v à partir des images de deux points distincts.

Exercice 5 – Classification

Soit f une similitude directe d'écriture

$$z' = az + b, \qquad a \neq 0.$$

1. Montrer que si $a \neq 1$, alors f possède un unique point fixe.
2. Déterminer les conditions pour que f soit une rotation.
3. Déterminer les conditions pour que f soit une homothétie.
4. Donner un exemple de similitude qui n'est ni une rotation ni une homothétie.

Exercice 6 – Approfondissement

Soient A, B, C trois points non alignés. On construit extérieurement les triangles équilatéraux ABM et ACN.

1. Écrire les relations complexes entre les affixes de A, B, M et de A, C, N.
2. Chercher une similitude directe envoyant B sur C et M sur N.
3. Étudier les conditions d'existence d'une telle similitude et déterminer son centre lorsqu'il existe.
4. Proposer une démonstration synthétique du résultat obtenu dans un cas particulier.

Cet exercice peut être adapté à une configuration précise en fixant les orientations et la position des triangles.

10 Éléments de conclusion

Les similitudes planes unifient l'étude des transformations qui conservent les angles et multiplient les longueurs par un facteur constant. Leur classification repose sur la conservation ou l'inversion de l'orientation.

L'approche géométrique permet de comprendre les propriétés des figures, tandis que l'approche complexe fournit des calculs efficaces pour déterminer les transformations, leurs centres et leurs compositions.

Une présentation orale peut s'appuyer sur l'exemple

$$z' = (1+i)z + 2$$

pour illustrer la détermination du rapport, de l'angle et du centre, puis proposer un exercice de composition ou de recherche de point fixe.

11 Références bibliographiques et institutionnelles

1. M. Berger, *Géométrie*, tomes 1 et 2, CEDIC / Nathan, ouvrages de référence pour la géométrie affine et euclidienne.
2. D. Lehmann et R. Manivel, *Géométrie*, EDP Sciences, pour les méthodes et structures géométriques.
3. J. M. Monier, *Géométrie*, Dunod, pour les transformations du plan et les nombres complexes.
4. Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, ressources institutionnelles disponibles sur https://www.education.gouv.fr/.
5. Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports du jury du CAPES externe de mathématiques*, disponibles sur le site du ministère et sur https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.

Les programmes et rapports de jury doivent être consultés dans leur version correspondant à la session du concours préparée. Les ouvrages cités constituent des pistes bibliographiques ; les éditions et les chapitres précis sont à vérifier selon les exemplaires utilisés.