Problèmes de constructions géométriques

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Introduction et problématique **1**

2 Prérequis et objectifs **1**

2.1 Prérequis 1

2.2 Objectifs 2

3 Les constructions élémentaires **2**

3.1 Tracer une droite et construire un point d'intersection 2

3.2 Médiatrice d'un segment 2

3.3 Bissectrice d'un angle 2

3.4 Perpendiculaire à une droite passant par un point 3

4 Méthode générale de résolution **3**

4.1 Analyse 3

4.2 Construction 3

4.3 Preuve 3

4.4 Discussion 3

5 Exemples de problèmes de construction **3**

5.1 Construire un triangle à partir de ses trois côtés 3

5.2 Construire le cercle circonscrit à un triangle 4

5.3 Construire les tangentes à un cercle passant par un point extérieur 4

6 Transformations et constructions géométriques **5**

6.1 Utilisation de la symétrie 5

6.2 Utilisation de la rotation 5

6.3 Utilisation de l'homothétie 5

7 Constructions à la règle et au compas : point de vue algébrique **5**

7.1 Nombres constructibles 5

7.2 Équations et constructions 6

7.3 Trois problèmes classiques impossibles 6

8 Dimension pédagogique **6**

9 Liste d'exercices **6**

10 Conclusion **8**

11 Références bibliographiques **8**

1 Introduction et problématique

Les problèmes de constructions géométriques occupent une place historique et fondamentale dans le développement de la géométrie. Depuis les mathématiques grecques jusqu'à la géométrie moderne, ils permettent de mettre en œuvre des propriétés d'incidence, d'orthogonalité, de parallélisme, de cercle et de transformations.

Une construction géométrique ne consiste pas seulement à produire une figure satisfaisant visuellement une consigne. Elle doit être accompagnée d'une méthode précise, d'une justification de sa validité et, lorsque le problème s'y prête, d'une étude de son existence et de son unicité.

On peut ainsi poser la problématique suivante :

> Comment transformer un problème géométrique en une suite d'opérations élémentaires permettant de construire une figure, puis démontrer que cette figure répond aux conditions imposées ?

On distinguera notamment les constructions à la règle non graduée et au compas, les constructions utilisant des instruments supplémentaires et les constructions analytiques ou numériques.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

La leçon suppose connus les éléments suivants :

- les propriétés élémentaires des droites, des angles et des cercles ;
- les notions de médiatrice, de bissectrice, de hauteur, de médiane et de cercle circonscrit ;
- les théorèmes de Thalès et de Pythagore ;
- les propriétés des triangles semblables et des triangles isométriques ;
- les transformations du plan : symétries, translations, rotations et homothéties ;
- les coordonnées cartésiennes et les équations de droites et de cercles, pour les approches analytiques.

2.2 Objectifs

L'objectif principal est de savoir analyser, construire et justifier une figure géométrique à partir de données imposées.

Plus précisément, il s'agit de :

- maîtriser les constructions élémentaires à la règle et au compas ;
- organiser une recherche en distinguant analyse, construction, preuve et discussion ;

— déterminer les conditions d'existence et le nombre éventuel de solutions ;
— exploiter les transformations géométriques pour simplifier une construction ;
— comprendre le lien entre constructions classiques, nombres constructibles et équations algébriques ;
— développer une démarche de résolution rigoureuse et transmissible dans un contexte d'enseignement.

3 Les constructions élémentaires

On considère ici la règle non graduée et le compas comme instruments de référence.

3.1 Tracer une droite et construire un point d'intersection

La règle non graduée permet de tracer la droite passant par deux points distincts. L'intersection de deux droites sécantes est alors un point constructible.

Le compas permet de tracer un cercle de centre donné passant par un point donné. Les intersections de droites et de cercles, ainsi que celles de deux cercles, fournissent les opérations fondamentales de la géométrie euclidienne classique.

3.2 Médiatrice d'un segment

Soient A et B deux points distincts.

On trace deux cercles de centres A et B, de même rayon strictement supérieur à $AB/2$. Ils se coupent en deux points P et Q. La droite (PQ) est la médiatrice de $[AB]$.

En effet,

$$PA = PB \quad \text{et} \quad QA = QB.$$

Les points P et Q appartiennent donc à la médiatrice de $[AB]$. Comme ils sont distincts, la droite (PQ) est cette médiatrice.

3.3 Bissectrice d'un angle

Soit un angle de sommet O, délimité par deux demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$.

On trace un cercle de centre O, qui coupe les côtés de l'angle en A et B. On trace ensuite deux cercles de centres A et B, de même rayon suffisamment grand, qui se coupent en un point C à l'intérieur de l'angle.

La demi-droite $[OC)$ est la bissectrice de l'angle.

La justification repose sur l'égalité des triangles OAC et OBC, ou sur le critère de lieu géométrique : les points équidistants des deux côtés d'un angle appartiennent à ses bissectrices.

3.4 Perpendiculaire à une droite passant par un point

Soit une droite d et un point P.

Si $P \notin d$, on trace un cercle de centre P coupant d en deux points A et B. On construit la médiatrice de $[AB]$: elle passe par P et est perpendiculaire à d.

Si $P \in d$, on choisit deux points A et B de d, symétriques par rapport à P, puis on construit la médiatrice de $[AB]$.

Dans les deux cas, on obtient la perpendiculaire à d passant par P.

4 Méthode générale de résolution

La résolution d'un problème de construction peut être organisée en quatre étapes.

4.1 Analyse

On suppose provisoirement la figure construite. On cherche à déterminer les propriétés que doivent vérifier les points inconnus, puis à les traduire en lieux géométriques.

Par exemple :

- un point situé à distance constante d'un point donné appartient à un cercle ;
- un point équidistant de deux points donnés appartient à une médiatrice ;
- un point équidistant de deux droites sécantes appartient à l'une des bissectrices des angles qu'elles déterminent.

4.2 Construction

On traduit l'analyse en une suite finie d'opérations élémentaires, en précisant les points et les objets utilisés.

4.3 Preuve

On démontre que la figure obtenue vérifie toutes les conditions du problème. La figure dessinée ne constitue jamais, à elle seule, une preuve.

4.4 Discussion

On examine les cas particuliers, l'existence des solutions et leur nombre. Les intersections de deux cercles, par exemple, peuvent donner deux points, un point unique ou aucun point réel.

5 Exemples de problèmes de construction

5.1 Construire un triangle à partir de ses trois côtés

Énoncé. Construire un triangle ABC tel que

$$AB = c, \qquad AC = b, \qquad BC = a,$$

où a, b, c sont des longueurs données.

Analyse. Le point C doit appartenir au cercle de centre A et de rayon b, ainsi qu'au cercle de centre B et de rayon a.

Construction.

1. Tracer le segment $[AB]$ de longueur c.
2. Tracer le cercle de centre A et de rayon b.
3. Tracer le cercle de centre B et de rayon a.
4. Choisir un point d'intersection C des deux cercles.

Preuve. Par construction, $AC = b$ et $BC = a$. Le triangle répond donc aux conditions demandées.

Discussion. Un triangle non dégénéré existe si et seulement si

$$a + b > c, \qquad a + c > b, \qquad b + c > a.$$

Lorsque ces inégalités sont strictes, les deux cercles se coupent en deux points symétriques par rapport à (AB). On obtient deux triangles si l'on distingue les positions de part et d'autre de (AB), mais un seul à symétrie près.

5.2 Construire le cercle circonscrit à un triangle

Énoncé. Construire le cercle circonscrit à un triangle ABC non dégénéré.

Analyse. Le centre O recherché vérifie

$$OA = OB = OC.$$

Il appartient donc aux médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$.

Construction. Construire les médiatrices de $[AB]$ et $[AC]$. Leur intersection est le point O. Tracer ensuite le cercle de centre O passant par A.

Preuve. Puisque O appartient aux deux médiatrices,

$$OA = OB \quad \text{et} \quad OA = OC.$$

Le cercle de centre O passant par A passe donc également par B et C.

Discussion. Les trois sommets n'étant pas alignés, les médiatrices considérées sont sécantes en un point unique. Le cercle circonscrit existe et est unique.

5.3 Construire les tangentes à un cercle passant par un point extérieur

Énoncé. Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et un point P extérieur au cercle. Construire les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P.

Analyse. Si T est un point de tangence, alors

$$OT \perp PT.$$

Le triangle OTP est rectangle en T. Le point T appartient donc au cercle de diamètre $[OP]$.

Construction.

1. Tracer le segment $[OP]$.
2. Construire son milieu M.
3. Tracer le cercle de centre M et de rayon MO.
4. Noter T_1 et T_2 les intersections de ce cercle avec $\mathcal{C}$.
5. Tracer les droites (PT_1) et (PT_2).

Preuve. Comme T_i appartient au cercle de diamètre $[OP]$, l'angle OTP est droit. Ainsi, PT_i est perpendiculaire au rayon OT_i et constitue une tangente au cercle.

Discussion. Puisque P est extérieur au cercle, les deux cercles se coupent en deux points distincts. Il existe exactement deux tangentes.

6 Transformations et constructions géométriques

Les transformations permettent souvent de ramener un problème à une construction plus simple.

6.1 Utilisation de la symétrie

Une symétrie axiale permet notamment de construire un point dont la distance à une droite est prescrite, ou de transformer une ligne brisée en un segment.

Par exemple, pour minimiser $AM + MB$, avec M appartenant à une droite d, on peut réfléchir A par rapport à d en un point A'. La longueur AM est égale à $A'M$. Le problème revient alors à minimiser $A'M + MB$, ce qui conduit à rechercher l'intersection de d avec la droite $(A'B)$, lorsque cette intersection appartient au domaine considéré.

6.2 Utilisation de la rotation

Une rotation peut transformer un problème faisant intervenir des distances et des angles en un problème d'alignement ou d'intersection de droites.

Elle est notamment utile dans la construction de triangles soumis à des contraintes d'angles et dans certains problèmes d'optimisation géométrique.

6.3 Utilisation de l'homothétie

L'homothétie permet de passer d'une figure à une figure semblable, de rapport donné. Elle intervient notamment dans les problèmes de construction de triangles à partir de rapports de longueurs ou dans les configurations de Thalès.

7 Constructions à la règle et au compas : point de vue algébrique

7.1 Nombres constructibles

On fixe une unité de longueur. Un nombre réel est dit constructible si l'on peut construire, à la règle non graduée et au compas, un segment dont il est la longueur.

Les opérations usuelles sur les longueurs constructibles permettent de construire leur somme, leur différence, leur produit et leur quotient, lorsque le quotient est défini. On peut également construire la racine carrée d'un nombre constructible positif.

Les nombres constructibles appartiennent à des extensions successives du corps des nombres rationnels obtenues par adjonction de racines carrées.

7.2 Équations et constructions

Les intersections de droites et de cercles conduisent à résoudre des équations de degré au plus deux à coefficients dans un corps de nombres déjà constructibles.

On en déduit que tout nombre constructible est algébrique sur $\mathbb{Q}$ et que son degré sur $\mathbb{Q}$ est une puissance de deux.

La réciproque est fausse sous la seule hypothèse que le degré est une puissance de deux : il faut également que le nombre appartienne à une tour d'extensions quadratiques.

7.3 Trois problèmes classiques impossibles

Trois problèmes célèbres de la géométrie grecque ne peuvent pas être résolus à la règle non graduée et au compas en toute généralité.

- **La duplication du cube :** construire un cube de volume double d'un cube donné. Cela revient à construire $\sqrt[3]{2}$, qui n'est pas constructible.
- **La trisection de l'angle :** partager tout angle donné en trois angles égaux. Certaines trisections sont possibles, mais pas celle d'un angle arbitraire.
- **La quadrature du cercle :** construire un carré de même aire qu'un disque donné. Cela exigerait de construire $\sqrt{\pi}$, ce qui est impossible puisque π est transcendant.

Ces impossibilités ne concernent que les instruments et les opérations autorisés. Elles ne signifient pas que les problèmes sont insolubles avec d'autres instruments ou méthodes.

8 Dimension pédagogique

Les problèmes de construction permettent de travailler plusieurs compétences mathématiques :

- chercher et expérimenter à partir d'une figure ;
- raisonner en mobilisant des propriétés géométriques ;
- communiquer une procédure précise ;
- représenter une situation par une figure ;
- distinguer conjecture, vérification instrumentale et démonstration.

Au collège, les constructions élémentaires consolident la connaissance des propriétés géométriques. Au lycée, elles peuvent être articulées avec les transformations, les vecteurs, les coordonnées et les équations. Les logiciels de géométrie dynamique permettent de formuler des conjectures, à condition de ne pas confondre invariance expérimentale et preuve.

Pour le professeur, l'enjeu est de faire expliciter les raisons de chaque opération et de guider les élèves vers une démarche de résolution autonome.

9 Liste d'exercices

Exercice 1 – Construction élémentaire

Construire le milieu d'un segment $[AB]$ à la règle non graduée et au compas. Démontrer que la construction est correcte.

Exercice 2 – Triangle sous contraintes

Construire un triangle ABC tel que

$$AB = 6 \text{ cm}, \qquad AC = 5 \text{ cm}, \qquad BC = 4 \text{ cm}.$$

Justifier la construction et discuter le nombre de solutions.

Exercice 3 – Triangle rectangle

Construire un triangle rectangle en A connaissant l'hypoténuse BC et la longueur AB. Déterminer les conditions d'existence et discuter les positions possibles du point A.

Exercice 4 – Cercle inscrit

Construire le cercle inscrit à un triangle donné. Justifier que son centre est l'intersection des bissectrices et établir que le cercle est tangent aux trois côtés.

Exercice 5 – Tangentes à un cercle

Construire les tangentes à un cercle donné passant par un point extérieur. Expliquer pourquoi il existe exactement deux solutions.

Exercice 6 – Construction d'un quatrième sommet

Étant donnés trois sommets consécutifs A, B et C d'un parallélogramme $ABCD$, construire le point D. Proposer deux méthodes et justifier chacune d'elles.

Exercice 7 – Transformation géométrique

Soient deux points A et B et une droite d. Construire un point M de d minimisant $AM + MB$. Étudier les différentes positions de A et B par rapport à d et préciser les cas où le minimum est atteint.

Exercice 8 – Triangle et cercle circonscrit

Construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et une autre longueur. Étudier les conditions d'existence et le nombre de solutions.

Exercice 9 – Construction algébrique

Construire un segment de longueur $\sqrt{ab}$ à partir de deux segments de longueurs constructibles $a > 0$ et $b > 0$. On pourra utiliser le théorème de Thalès et un demi-cercle.

Exercice 10 – Impossibilité

Expliquer pourquoi il n'est pas possible de dupliquer un cube à la règle non graduée et au compas. On pourra établir que le polynôme $X^3 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et utiliser le critère algébrique de constructibilité.

Exercice 11 – Problème de synthèse

Construire un triangle connaissant son périmètre et ses trois angles. On cherchera à ramener le problème à une figure semblable de périmètre fixé, puis à justifier l'existence et l'unicité de la solution, lorsque les données sont compatibles.

Exercice 12 – Géométrie dynamique

À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, construire un triangle et son cercle circonscrit. Déplacer les sommets et conjecturer la position du centre du cercle selon que le triangle est aigu, rectangle ou obtus. Démontrer les propriétés observées.

10 Conclusion

Les problèmes de constructions géométriques constituent un terrain privilégié pour articuler intuition, méthode et preuve. La démarche classique – analyse, construction, preuve et discussion – fournit un cadre rigoureux pour traiter les problèmes et en examiner les solutions.

Au-delà de leur intérêt historique, les constructions permettent de développer le raisonnement géométrique, d'exploiter les transformations et de mettre en évidence les liens entre géométrie et algèbre. L'étude des problèmes impossibles souligne enfin que la résolution mathématique dépend aussi de la nature des opérations autorisées.

11 Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, trad. Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France, 1990–2001. Voir notamment les livres I à IV.

[2] H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2e édition, Wiley, 1969.

[3] Jacques Hadamard, *Leçons de géométrie élémentaire*, Armand Colin, éditions historiques diverses.

[4] Richard Courant et Herbert Robbins, *What Is Mathematics ? An Elementary Approach to Ideas and Methods*, Oxford University Press, 1941 ; éditions révisées ultérieures.

[5] John H. Conway et Richard K. Guy, *The Book of Numbers*, Springer, 1996.

[6] Pierre-Laurent Wantzel, « Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas », *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 1837.

[7] Instituts de recherche sur l'enseignement des mathématiques (IREM), publications et ressources pédagogiques consacrées à la géométrie, aux constructions et à l'enseignement de la preuve.

[8] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*, ressources institutionnelles disponibles sur Éduscol : https://eduscol.education.fr/.