Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Problèmes de lieux géométriques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **1**

2 Définition et démarche générale **2**
2.1 Méthode générale de résolution 2

3 Lieux définis par des distances **2**
3.1 Médiatrice d'un segment 2
3.2 Cercle 3
3.3 Ensemble des points situés à distance constante d'une droite 3
3.4 Rapport de distances 3

4 Lieux définis par des angles **4**
4.1 Angle droit et cercle de diamètre donné 4
4.2 Ensemble des points voyant un segment sous un angle constant 4

5 Lieux définis par des produits scalaires **4**
5.1 Angle droit 4
5.2 Produit scalaire constant 4

6 Lieux obtenus par une méthode analytique **5**
6.1 Équations cartésiennes 5
6.2 Exemple : lieu défini par une somme de distances 5
6.3 Exemple : lieu défini par une différence de distances 5

7 Lieux et transformations géométriques **5**

8 Lieux et nombres complexes **6**

9 Choix de la méthode **6**

10 Exercices proposés **7**

11 Éléments de correction des exercices **8**

12 Conclusion **9**

1 Prérequis et objectifs

Cette leçon suppose connues les notions de distance, de médiatrice, de bissectrice, de cercle, de droite et de vecteur, ainsi que les principales transformations du plan : translations, rotations, symétries et homothéties. Les outils analytiques mobilisés sont les coordonnées cartésiennes, les équations de droites et de cercles, les produits scalaires et les équations paramétriques. Selon le niveau considéré, on pourra également utiliser les nombres complexes et les fonctions vectorielles.

L'objectif est de savoir traduire une condition géométrique portant sur un point variable en une caractérisation de son lieu, puis de déterminer et de justifier ce lieu. On cherchera à comparer

les méthodes synthétique, analytique et vectorielle, en veillant à établir une équivalence entre la condition initiale et la caractérisation obtenue. Une attention particulière sera portée aux cas particuliers, aux restrictions de domaine et aux points éventuellement exclus.

2 Définition et démarche générale

Définition 2.1. *Soit E le plan euclidien et soit $P(M)$ une propriété dépendant d'un point M du plan. Le lieu géométrique associé est l'ensemble*

$$\mathcal{L} = \{M \in E \mid P(M)\}.$$

Il s'agit donc de l'ensemble des points du plan qui vérifient une condition géométrique donnée.

Remarque 2.2. *Un lieu peut être une droite, un cercle, une conique, un ensemble fini de points, une réunion de courbes, ou encore un ensemble vide. Il ne faut pas présupposer la nature du lieu avant de l'avoir établie.*

2.1 Méthode générale de résolution

Pour résoudre un problème de lieu géométrique, on peut suivre les étapes suivantes.

1. Identifier le point variable M et les données fixes.
2. Traduire la condition géométrique en une relation entre distances, angles, vecteurs ou coordonnées.
3. Choisir une méthode adaptée : géométrie synthétique, calcul vectoriel, coordonnées ou nombres complexes.
4. Déterminer l'ensemble des points satisfaisant la relation.
5. Vérifier la réciproque : tout point du lieu trouvé satisfait-il la condition initiale ?
6. Étudier les cas dégénérés, les restrictions de domaine et les éventuelles exclusions.

La distinction entre implication et équivalence est essentielle : une transformation algébrique peut introduire des solutions parasites ou faire perdre des points si certaines divisions ne sont pas justifiées.

3 Lieux définis par des distances

3.1 Médiatrice d'un segment

Théorème 3.1. *Soient A et B deux points distincts du plan. Le lieu des points M tels que*

$$MA = MB$$

est la médiatrice du segment $[AB]$.

Démonstration. L'ensemble des points équidistants de A et de B est, par définition, la médiatrice de $[AB]$. On peut également le démontrer par calcul.

Plaçons-nous dans un repère orthonormé avec

$$A(-a, 0), \qquad B(a, 0), \qquad a > 0.$$

Pour $M(x, y)$, la condition $MA = MB$ équivaut à

$$(x + a)^2 + y^2 = (x - a)^2 + y^2.$$

Après simplification, on obtient $x = 0$, équation de la médiatrice de $[AB]$. □

3.2 Cercle

Théorème 3.2. *Soit A un point du plan et soit $r > 0$. Le lieu des points M tels que*

$$MA = r$$

est le cercle de centre A et de rayon r.

Si $r = 0$, le lieu se réduit au point A. Si $r < 0$, il est vide.

3.3 Ensemble des points situés à distance constante d'une droite

Propriété 3.3. *Soit d une droite et soit $h > 0$. Le lieu des points M tels que*

$$d(M, d) = h$$

est la réunion de deux droites parallèles à d, situées à la distance h de celle-ci.

Cette propriété illustre la différence entre distance à un point et distance à une droite.

3.4 Rapport de distances

Exemple 3.4. *Soient A et B deux points distincts et soit $k > 0$. Étudions le lieu des points M tels que*

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Pour $k = 1$, le lieu est la médiatrice de $[AB]$.

Pour $k \neq 1$, le lieu est un cercle, appelé cercle d'Apollonius.

Démonstration. Prenons un repère orthonormé tel que

$$A(0,0), \qquad B(d,0), \qquad d > 0.$$

La condition s'écrit

$$x^2 + y^2 = k^2\big((x-d)^2 + y^2\big).$$

Pour $k \neq 1$, on complète le carré :

$$\left(x + \frac{k^2 d}{1-k^2}\right)^2 + y^2 = \frac{k^2 d^2}{(1-k^2)^2}.$$

Le lieu est donc le cercle de centre

$$I\left(\frac{k^2 d}{k^2 - 1}, 0\right)$$

et de rayon

$$R = \frac{kd}{|1-k^2|}.$$

Pour $k = 1$, l'équation initiale se réduit à $x = d/2$. □

4 Lieux définis par des angles

4.1 Angle droit et cercle de diamètre donné

Théorème 4.1 (Théorème de Thalès pour le cercle)**.** *Soient A et B deux points distincts. Le lieu des points M tels que*

$$\widehat{AMB} = 90^\circ$$

est le cercle de diamètre $[AB]$, privé des points A et B.

Démonstration. Par le théorème de Thalès, tout point du cercle de diamètre $[AB]$, distinct de A et de B, voit le segment $[AB]$ sous un angle droit.

Réciproquement, si $\widehat{AMB} = 90^\circ$, le triangle AMB est rectangle en M. Le milieu de son hypoténuse $[AB]$ est équidistant de A, B et M. Le point M appartient donc au cercle de diamètre $[AB]$. □

4.2 Ensemble des points voyant un segment sous un angle constant

Soient A et B deux points distincts et soit $\theta \in]0, \pi[$. On considère le lieu des points M tels que l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ soit égal à θ.

Le lieu est constitué, selon la valeur de θ, d'arcs de cercles passant par A et B. Il faut préciser la convention retenue pour l'angle et les restrictions sur les points M.

Pour une construction synthétique, on peut utiliser le fait que les angles inscrits qui interceptent une même corde sont égaux ou supplémentaires, suivant les arcs considérés.

5 Lieux définis par des produits scalaires

5.1 Angle droit

Propriété 5.1. *Soient A et B deux points distincts. Le lieu des points M tels que*

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

est le cercle de diamètre $[AB]$, privé de A et de B si l'on impose que l'angle soit défini.

Démonstration. La condition de produit scalaire nul équivaut à l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$, lorsqu'ils sont non nuls. Elle équivaut donc à $\widehat{AMB} = 90^\circ$. On applique le théorème précédent. □

5.2 Produit scalaire constant

Propriété 5.2. *Soient $\vec{u}$ un vecteur non nul et $c \in \mathbb{R}$. Le lieu des points M tels que*

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = c$$

est une droite perpendiculaire à $\vec{u}$.

Démonstration. Dans un repère orthonormé où $\vec{u} = (u_1, u_2)$ et $M(x, y)$, la condition s'écrit

$$(x - x_A)u_1 + (y - y_A)u_2 = c.$$

C'est une équation cartésienne de droite dont un vecteur normal est $\vec{u}$. □

6 Lieux obtenus par une méthode analytique

6.1 Équations cartésiennes

Dans un repère orthonormé, une condition portant sur les distances peut être traduite par une équation en x et y.

Les équations usuelles sont notamment :

$$\begin{aligned}
&\text{Droite :} && ax + by + c = 0,\\
&\text{Cercle :} && (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2,\\
&\text{Parabole :} && y^2 = 2px,\\
&\text{Ellipse :} && \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\\
&\text{Hyperbole :} && \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Ces formes permettent de reconnaître certains lieux, à condition de tenir compte des hypothèses et des domaines de définition.

6.2 Exemple : lieu défini par une somme de distances

Exemple 6.1. *Soient A et B deux points distincts et soit $c > AB$. Le lieu des points M tels que*

$$MA + MB = c$$

est une ellipse de foyers A et B.

Par définition, l'ellipse est l'ensemble des points dont la somme des distances à deux foyers fixes est constante. L'inégalité triangulaire donne

$$MA + MB \geq AB.$$

La condition $c > AB$ assure que le lieu est une ellipse non dégénérée. Pour $c = AB$, le lieu est le segment $[AB]$. Pour $c < AB$, le lieu est vide.

6.3 Exemple : lieu défini par une différence de distances

Exemple 6.2. *Soient A et B deux points distincts. Pour une constante c telle que $0 < |c| < AB$, le lieu des points M vérifiant*

$$|MA - MB| = |c|$$

est une hyperbole de foyers A et B.

En effet, la différence absolue des distances à deux points fixes caractérise une hyperbole lorsque cette différence est strictement comprise entre zéro et la distance des foyers.

Si $c = 0$, on retrouve la médiatrice de $[AB]$. Si $|c| = AB$, le lieu est constitué de deux demi-droites portées par la droite (AB), privées ou non de leurs extrémités selon la convention retenue. Si $|c| > AB$, le lieu est vide, par inégalité triangulaire.

7 Lieux et transformations géométriques

Les transformations permettent de déterminer certains lieux sans recourir à des calculs complexes.

Propriété 7.1. *Une isométrie conserve les distances. L'image d'un lieu défini par des égalités de distances est donc le lieu correspondant pour les points transformés.*

Propriété 7.2. *Une homothétie de rapport $k \neq 0$ multiplie toutes les distances par $|k|$. Elle transforme une droite en une droite et un cercle en un cercle. Elle transforme également les coniques en coniques.*

Exemple 7.3. *Soit M un point variable sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. On construit M' tel que*

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}, \qquad k \neq 0.$$

Le lieu de M' est le cercle de centre O et de rayon égal à $|k|$ fois le rayon de $\mathcal{C}$.

On peut également exploiter les rotations, les symétries et les compositions de transformations pour relier le lieu recherché à un lieu connu.

8 Lieux et nombres complexes

Dans un repère orthonormé direct, on associe à chaque point M son affixe $z \in \mathbb{C}$.
Les conditions géométriques peuvent alors s'écrire sous forme complexe :

$$MA = MB \quad \Longleftrightarrow \quad |z - a| = |z - b|,$$

où a et b sont les affixes de A et B.
De même,

$$MA = r \quad \Longleftrightarrow \quad |z - a| = r.$$

Une rotation de centre A et d'angle θ s'exprime par

$$z' - a = e^{i\theta}(z - a),$$

et une homothétie de centre A et de rapport k par

$$z' - a = k(z - a).$$

Les nombres complexes sont particulièrement efficaces lorsque le problème fait intervenir des rotations, des angles orientés, des similitudes ou plusieurs transformations successives.

9 Choix de la méthode

On peut distinguer quatre approches complémentaires.

- **Méthode synthétique :** elle mobilise les propriétés géométriques classiques, notamment les médiatrices, les cercles, les angles inscrits et les coniques.
- **Méthode vectorielle :** elle convient aux problèmes utilisant l'orthogonalité, le produit scalaire, les alignements et les relations affines.
- **Méthode analytique :** elle traduit les conditions en équations et permet de déterminer précisément le lieu.
- **Méthode complexe :** elle est adaptée aux rotations, similitudes et configurations comportant des angles orientés.

La méthode choisie doit simplifier le problème tout en permettant de justifier rigoureusement les deux sens de l'équivalence.

10 Exercices proposés

Les exercices suivants permettent de varier les méthodes et les niveaux de difficulté.

Exercice 1 : médiatrice

Soient $A(-2,1)$ et $B(4,3)$ dans un repère orthonormé. Déterminer l'équation du lieu des points $M(x,y)$ tels que $MA = MB$. Retrouver géométriquement la nature de ce lieu.

Exercice 2 : cercle de diamètre

Soient $A(-1,0)$ et $B(3,2)$. Déterminer l'équation du lieu des points M tels que

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Préciser le centre et le rayon du cercle obtenu, ainsi que les points pour lesquels le produit scalaire est défini mais l'angle ne l'est pas.

Exercice 3 : cercle d'Apollonius

Soient $A(0,0)$ et $B(4,0)$. Déterminer le lieu des points M tels que

$$MA = 2MB.$$

Donner le centre et le rayon du cercle obtenu, puis vérifier le résultat par un raisonnement géométrique.

Exercice 4 : somme de distances

Soient $A(-3,0)$ et $B(3,0)$. Déterminer la nature du lieu

$$MA + MB = 10.$$

Donner les demi-axes de la conique et vérifier que ses foyers sont A et B.

Exercice 5 : produit scalaire constant

Soient $A(1,2)$ et $\vec{u} = (2,-1)$. Déterminer le lieu des points $M(x,y)$ vérifiant

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 3.$$

Interpréter géométriquement l'équation obtenue.

Exercice 6 : angle constant

Soient A et B deux points fixes. Déterminer le lieu des points M tels que l'angle géométrique $\widehat{AMB}$ soit égal à $60°$. On précisera les arcs de cercle concernés et les restrictions sur M.

Exercice 7 : lieu et transformation

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R. À chaque point M de $\mathcal{C}$, on associe le point M' défini par

$$\overrightarrow{OM'} = -2\overrightarrow{OM}.$$

Déterminer le lieu de M' et préciser la transformation utilisée.

Exercice 8 : lieu et nombres complexes

Dans le plan complexe, soient A et B d'affixes respectives $a = -1$ et $b = 1$. Déterminer le lieu des points M d'affixe z tels que

$$|z - a| = |z - b|.$$

Retrouver le résultat par la méthode des distances.

Exercice 9 : lieu défini par une différence de distances

Soient $A(-4, 0)$ et $B(4, 0)$. Étudier le lieu des points M tels que

$$|MA - MB| = 4.$$

Identifier la conique et déterminer ses paramètres.

Exercice 10 : synthèse

Soient A et B deux points distincts. On considère les points M vérifiant

$$MA^2 + MB^2 = \lambda,$$

où λ est une constante réelle. Déterminer le lieu en fonction de λ en utilisant le milieu I de $[AB]$. Discuter les cas où le lieu est vide, réduit à un point ou constitue un cercle.

11 Éléments de correction des exercices

1. La médiatrice de $[AB]$ a pour équation
$$3x + y - 5 = 0.$$
2. Le cercle a pour diamètre $[AB]$, de centre $(1, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$. Les points A et B vérifient l'équation du produit scalaire nul, mais l'angle AMB n'est pas défini en ces points.
3. Le cercle d'Apollonius a pour centre $\left(\frac{16}{3}, 0\right)$ et pour rayon $\frac{8}{3}$.
4. L'ellipse a pour demi-grand axe $a = 5$ et demi-distance focale $c = 3$. Ainsi, $b = \sqrt{a^2 - c^2} = 4$.
5. L'équation du lieu est
$$2x - y - 2 = 0.$$
6. Le lieu est formé de deux arcs de cercle capables de $60°$ sur la corde $[AB]$, avec les précautions liées à la convention d'angle retenue.
7. Le lieu est le cercle de centre O et de rayon $2R$.
8. La condition équivaut à $\mathrm{Re}(z) = 0$: le lieu est l'axe imaginaire.
9. Le lieu est une hyperbole de foyers A et B, avec demi-grand axe $a = 2$ et demi-distance focale $c = 4$. Le demi-petit axe vérifie $b^2 = c^2 - a^2 = 12$.
10. Si I est le milieu de $[AB]$, l'identité de la médiane donne
$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}.$$
Le lieu est donc un cercle de centre I si $\lambda > \frac{AB^2}{2}$, le point I si $\lambda = \frac{AB^2}{2}$, et l'ensemble vide sinon.

12 Conclusion

Les problèmes de lieux géométriques constituent un thème transversal qui relie la géométrie synthétique, l'algèbre, le calcul vectoriel, les nombres complexes et l'étude des coniques.

La démarche essentielle consiste à traduire une propriété géométrique en une condition mathématique exploitable, à identifier le lieu correspondant, puis à établir rigoureusement l'équivalence entre la condition initiale et le résultat obtenu. Les hypothèses, les cas particuliers et les restrictions de domaine doivent être traités explicitement.

Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*. Ouvrage fondateur de la géométrie classique, utile pour les constructions, les lieux et les raisonnements synthétiques.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, tomes 1 et 2, Cedic/Nathan. Référence générale pour la géométrie euclidienne, les transformations et les coniques.

[3] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, *Geometry Revisited*, Mathematical Association of America, 1967. Ouvrage consacré à des problèmes classiques de géométrie et à leurs méthodes de résolution.

[4] Michèle Audin, *Géométrie*, ouvrage de référence pour approfondir les méthodes géométriques, selon l'édition consultée.

[5] IREM, *Publications et ressources pédagogiques de géométrie*. Les brochures et ressources des IREM proposent des activités et des problèmes de géométrie adaptés à différents niveaux. Catalogue et ressources : https://www.univ-irem.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*. Documents institutionnels permettant de situer les notions et les méthodes dans les programmes scolaires. Site : https://www.education.gouv.fr/.