L'orthogonalité

Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Géométrie euclidienne, algèbre linéaire et applications

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

1.1 Prérequis . . . 2

1.2 Objectifs . . . 2

2 Le produit scalaire et l'orthogonalité **2**

2.1 Définition dans le plan et dans l'espace . . . 2

2.2 Expression en coordonnées . . . 3

2.3 Identités remarquables . . . 3

3 Orthogonalité en géométrie plane **3**

3.1 Critères de perpendicularité de deux droites . . . 3

3.2 Médiatrice et hauteur . . . 4

3.3 Cercle de diamètre donné . . . 4

4 Orthogonalité dans l'espace **4**

4.1 Droites et plans . . . 4

4.2 Vecteur normal à un plan . . . 5

4.3 Distance d'un point à un plan . . . 5

5 Projection orthogonale et distance **5**

5.1 Projection orthogonale sur une droite . . . 5

5.2 Théorème de Pythagore et minimisation de la distance . . . 6

6 Orthogonalité et algèbre linéaire **6**

6.1 Sous-espaces orthogonaux . . . 6

6.2 Bases orthogonales et orthonormées . . . 6

6.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt . . . 7

7 Applications **7**

7.1 Méthode des moindres carrés . . . 7

7.2 Géométrie analytique et optimisation . . . 7

7.3 Orthogonalité et fonctions . . . 8

8 Exercices **8**

9 Éléments de correction et pistes **10**

10 Conclusion **12**

11 Références bibliographiques **12**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose connus les éléments suivants :

- les vecteurs du plan et de l'espace ;
- les coordonnées cartésiennes et les bases ;
- les équations de droites et de plans ;
- les distances, les normes et les propriétés du triangle ;
- les identités algébriques usuelles ;
- les notions élémentaires de produit scalaire ;
- les systèmes linéaires et les matrices.

Selon le niveau auquel on situe les développements, on pourra également mobiliser les notions de sous-espace vectoriel, de noyau d'une application linéaire et de projection.

1.2 Objectifs

L'objectif de cette leçon est de présenter l'orthogonalité comme une notion géométrique unificatrice, définie par le produit scalaire et utilisée aussi bien dans la géométrie plane et spatiale que dans l'algèbre linéaire.

Il s'agit notamment de :

- définir l'orthogonalité entre vecteurs, droites, plans et sous-espaces vectoriels ;
- établir les critères analytiques de perpendicularité ;
- étudier les projections orthogonales et les distances ;
- comprendre le rôle de l'orthogonalité dans les bases, les décompositions vectorielles et les approximations ;
- relier les propriétés géométriques à leurs traductions algébriques ;
- savoir choisir une méthode adaptée à un problème donné.

2 Le produit scalaire et l'orthogonalité

2.1 Définition dans le plan et dans l'espace

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace euclidien.

Définition 2.1. *Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0.$$

On note alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs. Pour deux vecteurs non nuls, cette définition équivaut à la perpendicularité de leurs directions.

Dans le plan ou dans l'espace euclidien, si θ désigne l'angle entre deux vecteurs non nuls, on a

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta.$$

Ainsi,

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Expression en coordonnées

Dans un repère orthonormé du plan, si

$$\vec{u} = (x, y), \qquad \vec{v} = (x', y'),$$

alors

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy'.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0.}$$

Dans un repère orthonormé de l'espace, pour

$$\vec{u} = (x, y, z), \qquad \vec{v} = (x', y', z'),$$

on obtient

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = xx' + yy' + zz',$$

et donc

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0.}$$

Exemple 2.2. *Les vecteurs* $\vec{u} = (2, 3)$ *et* $\vec{v} = (3, -2)$ *sont orthogonaux car*

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2 \times 3 + 3 \times (-2) = 0.$$

2.3 Identités remarquables

Le produit scalaire vérifie

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \|\vec{v}\|^2.$$

Lorsque $\vec{u} \perp \vec{v}$, cette relation devient

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2.}$$

On retrouve ainsi le théorème de Pythagore sous forme vectorielle.

Réciproquement, si

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2,$$

alors le produit scalaire est nul : les vecteurs sont orthogonaux.

3 Orthogonalité en géométrie plane

3.1 Critères de perpendicularité de deux droites

Soient deux droites de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$.

Les droites sont perpendiculaires si et seulement si

$$ac + bd = 0.$$

Si leurs équations sont

$$d_1 : ax + by + c_1 = 0, \qquad d_2 : a'x + b'y + c_2 = 0,$$

leurs vecteurs normaux sont respectivement (a, b) et (a', b'). Les droites sont perpendiculaires si et seulement si

$$aa' + bb' = 0.$$

Attention : cette dernière condition concerne les vecteurs normaux des droites. Elle caractérise donc la perpendicularité des droites lorsque leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

3.2 Médiatrice et hauteur

La médiatrice du segment $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que

$$MA = MB.$$

En utilisant les coordonnées ou le produit scalaire, on montre que c'est une droite perpendiculaire à (AB) passant par le milieu de $[AB]$.

Dans un triangle ABC, la hauteur issue de A est la droite passant par A et perpendiculaire à (BC). Elle peut être caractérisée par

$$\left\langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0,$$

où H est le pied de cette hauteur.

3.3 Cercle de diamètre donné

Théorème 3.1 (Théorème de Thalès sur le cercle)**.** *Soient A et B deux points distincts. Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si*

$$\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0.$$

Autrement dit, l'angle $\widehat{AMB}$ est droit.

Démonstration. Si M appartient au cercle de diamètre $[AB]$, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{AMB} = 90°$, donc $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$.

Réciproquement, si $\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$, les droites (MA) et (MB) sont perpendiculaires. Le triangle AMB est rectangle en M ; le milieu de l'hypoténuse $[AB]$ est alors équidistant de A, B et M. Ainsi, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$. □

4 Orthogonalité dans l'espace

4.1 Droites et plans

Deux droites de l'espace sont perpendiculaires lorsque leurs directions sont orthogonales et qu'elles se coupent.

Une droite est perpendiculaire à un plan si elle est orthogonale à toute direction de ce plan.

Théorème 4.1 (Critère de perpendicularité d'une droite et d'un plan)**.** *Une droite est perpendiculaire à un plan si et seulement si elle est perpendiculaire à deux droites sécantes de ce plan.*

Démonstration. Soit d une droite et P un plan. Supposons que d soit perpendiculaire à deux droites sécantes d_1 et d_2 contenues dans P. Les vecteurs directeurs de d_1 et d_2 forment une base du plan directeur de P. Le vecteur directeur de d est orthogonal à ces deux vecteurs ; par linéarité du produit scalaire, il est orthogonal à toute combinaison linéaire de ceux-ci. La droite d est donc orthogonale à toutes les directions de P. □

4.2 Vecteur normal à un plan

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P s'il est orthogonal à tout vecteur directeur de ce plan.

Si un plan admet une équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0,$$

alors

$$\boxed{\vec{n} = (a, b, c)}$$

est un vecteur normal au plan.

Une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ est perpendiculaire au plan si son vecteur directeur est colinéaire à un vecteur normal de ce plan.

4.3 Distance d'un point à un plan

Soit P le plan d'équation

$$ax + by + cz + d = 0$$

et soit $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un point de l'espace.

La distance de M_0 au plan P est

$$\boxed{d(M_0, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.}$$

Cette formule s'obtient en projetant orthogonalement le point sur le plan suivant la direction d'un vecteur normal.

5 Projection orthogonale et distance

5.1 Projection orthogonale sur une droite

Soit D une droite passant par A et de vecteur directeur non nul $\vec{u}$. Pour tout point M, son projeté orthogonal H sur D est le point de D tel que

$$\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}.$$

Le point H est unique.

Si $H = A + t\vec{u}$ et si $\overrightarrow{AM} = \vec{v}$, la condition

$$\left\langle \overrightarrow{MH}, \vec{u} \right\rangle = 0$$

conduit à

$$\boxed{t = \frac{\langle \vec{v}, \vec{u} \rangle}{\|\vec{u}\|^2}.}$$

Par conséquent,

$$\boxed{\overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AM}, \vec{u} \right\rangle}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}.}$$

5.2 Théorème de Pythagore et minimisation de la distance

Théorème 5.1. *Soient M un point et H son projeté orthogonal sur une droite D. Pour tout point N de D,*

$$MN^2 = MH^2 + HN^2.$$

Par conséquent,

$$MN \geq MH,$$

avec égalité si et seulement si $N = H$.

Démonstration. Les vecteurs $\overrightarrow{MH}$ et $\overrightarrow{HN}$ sont orthogonaux. Le triangle MHN est rectangle en H, d'où

$$MN^2 = MH^2 + HN^2.$$

Le second terme étant positif ou nul, on obtient $MN \geq MH$. L'égalité a lieu exactement lorsque $HN = 0$, c'est-à-dire lorsque $N = H$. □

Ce résultat caractérise la projection orthogonale comme le point de la droite qui minimise la distance au point donné. Il se généralise aux sous-espaces vectoriels de dimension finie.

6 Orthogonalité et algèbre linéaire

6.1 Sous-espaces orthogonaux

Soit E un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E.

Définition 6.1. *L'orthogonal de F est le sous-espace*

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F,\ \langle x, y\rangle = 0\}.$$

Propriété 6.2. *Dans un espace euclidien de dimension finie,*

$$\boxed{\dim F + \dim F^\perp = \dim E}$$

et

$$\boxed{(F^\perp)^\perp = F.}$$

En particulier,

$$E = F \oplus F^\perp.$$

Tout vecteur de E s'écrit donc de manière unique comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

6.2 Bases orthogonales et orthonormées

Une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est orthogonale si

$$\langle e_i, e_j\rangle = 0 \quad \text{pour } i \neq j.$$

Elle est orthonormée si, de plus,

$$\|e_i\| = 1 \quad \text{pour tout } i.$$

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

Dans une base orthonormée, les coordonnées d'un vecteur x sont données par

$$\boxed{x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i.}$$

De plus,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle^2 .$$

6.3 Procédé d'orthonormalisation de Gram–Schmidt

À partir d'une famille libre $(v_1, \ldots, v_n)$ d'un espace euclidien, on construit une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ en posant

$$u_1 = v_1, \qquad e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|},$$

puis, pour $k \geq 2$,

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, e_j \rangle \, e_j, \qquad e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}.$$

La liberté de la famille initiale garantit que chaque u_k est non nul.

Ce procédé transforme une base quelconque en une base orthonormée. Il est fondamental en algèbre linéaire et dans les méthodes numériques.

7 Applications

7.1 Méthode des moindres carrés

L'orthogonalité permet de résoudre des problèmes d'approximation. Lorsqu'un vecteur b n'appartient pas à l'image d'une application linéaire représentée par une matrice A, on cherche un vecteur Ax qui minimise

$$\|Ax - b\| .$$

La condition d'optimalité s'écrit

$$A^{\mathsf{T}}(Ax - b) = 0,$$

soit

$$\boxed{A^{\mathsf{T}} A x = A^{\mathsf{T}} b.}$$

Ce sont les équations normales des moindres carrés.

Le résidu $b - Ax$ est orthogonal à l'image de A lorsque x est une solution des équations normales.

7.2 Géométrie analytique et optimisation

L'orthogonalité intervient notamment dans :

- la détermination de distances minimales ;
- la recherche de pieds de perpendiculaires ;
- les problèmes de tangence et de normales aux courbes ;
- la résolution de problèmes de lieux géométriques ;
- les décompositions en composantes indépendantes ;
- les méthodes de régression et d'approximation numérique.

7.3 Orthogonalité et fonctions

Dans un espace de fonctions muni d'un produit scalaire, on peut définir l'orthogonalité par

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Deux fonctions sont orthogonales lorsque

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0.$$

Par exemple, sur $[-\pi, \pi]$, les fonctions trigonométriques $\cos(nx)$ et $\cos(mx)$ sont orthogonales pour $n \neq m$, et il en est de même pour les fonctions sinus de fréquences distinctes. Ces relations sont au fondement du développement en séries de Fourier.

8 Exercices

Les exercices suivants permettent de mobiliser les différentes approches de l'orthogonalité. Ils peuvent être proposés dans un ordre progressif au cours de la préparation à l'oral.

Exercice 1 – Critère vectoriel dans le plan

Dans un repère orthonormé, on considère

$$A(1,2), \quad B(5,4), \quad C(2,8).$$

a) Calculer $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Déterminer le produit scalaire $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle$.
c) Le triangle ABC est-il rectangle en A ?
d) Déterminer une équation de la droite passant par A et perpendiculaire à (BC).

Exercice 2 – Cercle de diamètre

Soient $A(-1,0)$ et $B(3,2)$.

a) Déterminer le centre et le rayon du cercle de diamètre $[AB]$.
b) Montrer que son équation peut s'écrire

$$(x+1)(x-3) + y(y-2) = 0.$$

c) Retrouver cette équation en utilisant $\left\langle \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB} \right\rangle = 0$.

Exercice 3 – Projection orthogonale

Soient $A(1,2)$, $M(4,6)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{u} = (2,1)$.

a) Calculer les coordonnées du projeté orthogonal H de M sur D.
b) Déterminer la distance de M à D.
c) Vérifier que $\overrightarrow{MH} \perp \vec{u}$.

Exercice 4 – Hauteurs d'un triangle

Soient A, B et C trois points non alignés.

a) Écrire une caractérisation vectorielle de la hauteur issue de A.
b) Montrer que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.
c) Donner une démonstration utilisant les produits scalaires.

Exercice 5 – Droite et plan dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le plan

$$P : 2x - y + 2z - 3 = 0$$

et le point $M(1, 2, 0)$.

a) Donner un vecteur normal au plan P.
b) Déterminer le projeté orthogonal de M sur P.
c) Calculer la distance de M au plan P.

Exercice 6 – Orthogonal d'un sous-espace

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-espace

$$F = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (1, 0, 1)\big).$$

a) Déterminer une équation cartésienne de F.
b) Déterminer $F^{\perp}$.
c) Vérifier la relation $\dim F + \dim F^{\perp} = 3$.

Exercice 7 – Gram–Schmidt

Dans $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel, on considère

$$v_1 = (1, 1, 0), \quad v_2 = (1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

a) Vérifier que cette famille est libre.
b) Appliquer le procédé de Gram–Schmidt.
c) Normaliser les vecteurs obtenus et vérifier l'orthonormalité de la base finale.

Exercice 8 – Approximation par une droite

On cherche à ajuster les points (x_i, y_i) par une fonction affine $x \mapsto ax + b$.

a) Écrire la fonction à minimiser :

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

b) Calculer les conditions du minimum.
c) Interpréter ces conditions en termes d'orthogonalité.

Exercice 9 – Fonctions orthogonales

Sur $[-\pi, \pi]$, on définit

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

a) Montrer que $\sin(nx)$ et $\sin(mx)$ sont orthogonales lorsque n et m sont des entiers strictement positifs distincts.
b) Établir un résultat analogue pour les cosinus.
c) Expliquer le rôle de ces relations dans les séries de Fourier.

Exercice 10 – Synthèse géométrique

Soit $ABCD$ un parallélogramme.

a) Montrer que ses diagonales sont perpendiculaires si et seulement si deux côtés consécutifs ont la même longueur.
b) En déduire une caractérisation du losange par l'orthogonalité de ses diagonales.
c) Étudier les cas particuliers du rectangle et du carré.

9 Éléments de correction et pistes

Exercice 1

On a

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2), \qquad \overrightarrow{AC} = (1, 6).$$

Ainsi,

$$\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 4 + 12 = 16 \neq 0.$$

Le triangle n'est donc pas rectangle en A.

Le vecteur directeur de (BC) est

$$\overrightarrow{BC} = (-3, 4).$$

Une équation de la droite cherchée est donc

$$-3(x - 1) + 4(y - 2) = 0.$$

Exercice 2

Le centre est $I(1, 1)$ et le rayon vaut

$$r = \frac{AB}{2} = \sqrt{5}.$$

L'équation du cercle est

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 5.$$

Après développement, on retrouve

$$(x + 1)(x - 3) + y(y - 2) = 0.$$

Exercice 3

Le point H s'écrit $H = A + t\vec{u}$. Comme $\overrightarrow{AM} = (3, 4)$,

$$t = \frac{(3,4)\cdot(2,1)}{2^2+1^2} = \frac{10}{5} = 2.$$

Ainsi $H = (5, 4)$ et

$$\overrightarrow{MH} = (1, -2).$$

On vérifie que $(1, -2) \cdot (2, 1) = 0$. La distance est

$$MH = \sqrt{5}.$$

Exercice 4

Soit H l'intersection des hauteurs issues de A et de B. Si H est sur ces deux hauteurs, alors

$$\left\langle \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC} \right\rangle = 0, \qquad \left\langle \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{AC} \right\rangle = 0.$$

En utilisant

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$$

et les relations vectorielles du triangle, on établit

$$\left\langle \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{AB} \right\rangle = 0.$$

La hauteur issue de C passe donc aussi par H.

Exercice 5

Un vecteur normal à P est $\vec{n} = (2, -1, 2)$. Pour $M(1, 2, 0)$,

$$2x_M - y_M + 2z_M - 3 = -3, \qquad \|\vec{n}\| = 3.$$

La distance vaut donc

$$d(M, P) = 1.$$

Le projeté orthogonal est

$$H = M - \frac{-3}{9}(2, -1, 2) = \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Exercice 6

Un vecteur normal à F est

$$(1, 1, 0) \times (1, 0, 1) = (1, -1, -1).$$

Ainsi,

$$F^\perp = \mathrm{Vect}((1, -1, -1)),$$

et $\dim F + \dim F^\perp = 2 + 1 = 3$.

Exercice 7

La famille initiale est libre. On commence par

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0).$$

Puis

$$u_2 = v_2 - \langle v_2, e_1 \rangle e_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right).$$

Il reste à normaliser u_2, puis à soustraire de v_3 ses projections sur les deux premiers vecteurs orthonormés avant de normaliser le dernier vecteur.

Exercices 8 à 10

Les exercices 8 à 10 peuvent être traités à l'aide des projections orthogonales, des équations normales, des identités de produit scalaire et des relations vectorielles du parallélogramme.

10 Conclusion

L'orthogonalité relie la géométrie métrique à l'algèbre linéaire. Le produit scalaire permet de caractériser les configurations perpendiculaires, de calculer des projections et des distances, et d'établir des décompositions en sous-espaces orthogonaux.

Au-delà de la géométrie élémentaire, cette notion intervient dans l'orthonormalisation des bases, les méthodes d'approximation et l'analyse harmonique. Pour l'oral du CAPES, il importe de savoir passer d'une interprétation géométrique à une formulation vectorielle ou analytique, en justifiant les équivalences utilisées.

11 Références bibliographiques

Références

[1] Euclide, *Les Éléments*, livres I et XI, pour les fondements de la géométrie plane et spatiale.

[2] Marcel Berger, *Géométrie*, volumes 1 et 2, CEDIC / Fernand Nathan, pour la géométrie euclidienne et les transformations.

[3] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Algèbre*, Ellipses, pour les espaces vectoriels et les applications linéaires.

[4] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, pour les outils analytiques et les applications géométriques.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du collège et du lycée*, textes officiels disponibles sur https://www.education.gouv.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*, ressources disponibles sur le site officiel du ministère : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.