Suites monotones

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2

2 Définitions et premières propriétés **2**
- 2.1 Caractérisations pratiques . . . 3

3 Exemples élémentaires **3**

4 Le théorème de convergence des suites monotones **4**
- 4.1 Démonstration pour une suite croissante et majorée . . . 4
- 4.2 Démonstration pour une suite décroissante et minorée . . . 4

5 Suites monotones non bornées **5**

6 Suites définies par récurrence **5**
- 6.1 Méthode générale . . . 5
- 6.2 Exemple : une suite convergeant vers une racine carrée . . . 5

7 Monotonie et comparaison **6**

8 Erreurs fréquentes et points de vigilance **7**

9 Liste d'exercices **7**
- 9.1 Exercice 1 – Étude directe de monotonie . . . 7
- 9.2 Exercice 2 – Suite géométrique . . . 7
- 9.3 Exercice 3 – Suite récurrente et intervalle stable . . . 7
- 9.4 Exercice 4 – Suite définie par une fraction . . . 7
- 9.5 Exercice 5 – Suite récurrente avec paramètre . . . 8
- 9.6 Exercice 6 – Une suite monotone non bornée . . . 8
- 9.7 Exercice 7 – Monotonie à partir d'une fonction . . . 8
- 9.8 Exercice 8 – Contre-exemples . . . 8
- 9.9 Exercice 9 – Suite définie par une intégrale . . . 8
- 9.10 Exercice 10 – Approfondissement . . . 8

10 Éléments de correction et indications **9**

11 Références bibliographiques **10**

12 Conclusion **10**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

La présentation suppose maîtrisés les éléments suivants :

— les propriétés de l'ordre sur $\mathbb{R}$;

— la définition d'une suite réelle et les modes de définition d'une suite (explicite ou par récurrence) ;

— les raisonnements par récurrence ;

— les notions de majoration, de minoration et de bornitude ;

— les techniques de calcul algébrique et d'étude du signe ;

— la définition de la convergence d'une suite réelle.

1.2 Objectifs

L'objectif principal est de comprendre comment la monotonie permet d'étudier le comportement d'une suite réelle, notamment sa convergence ou sa divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$.

À l'issue de la leçon, on doit être capable :

— de définir et de caractériser les suites monotones ;

— de démontrer la monotonie d'une suite définie explicitement ou par récurrence ;

— d'utiliser le théorème de convergence des suites monotones ;

— d'exploiter les notions de borne supérieure et de borne inférieure ;

— d'étudier des suites récurrentes à l'aide d'un intervalle stable ;

— de distinguer monotonie, bornitude et convergence.

2 Définitions et premières propriétés

Définition 2.1 (Monotonie)**.** Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

— La suite u est *croissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.

— Elle est *décroissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_{n+1}$.

— Elle est *strictement croissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < u_{n+1}$.

— Elle est *strictement décroissante* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > u_{n+1}$.

Une suite est dite *monotone* si elle est croissante ou décroissante.

Remarque 2.2. Les inégalités larges sont essentielles : une suite constante est à la fois croissante et décroissante. Une suite strictement monotone est monotone, mais la réciproque est fausse.

Définition 2.3 (Majorant et minorant)**.** Une suite réelle u est :

— majorée s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$;

— minorée s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$;

— bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

2.1 Caractérisations pratiques

Pour étudier la monotonie, on dispose de plusieurs méthodes.

Méthode 2.4 (Étudier la différence)**.** On calcule

$$u_{n+1} - u_n.$$

Si cette différence est positive pour tout n, la suite est croissante. Si elle est négative pour tout n, elle est décroissante.

Méthode 2.5 (Étudier le quotient)**.** Lorsque $u_n > 0$ pour tout n, on peut étudier

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

Si ce quotient est supérieur ou égal à 1, la suite est croissante ; s'il est inférieur ou égal à 1, elle est décroissante. Cette méthode exige de vérifier la positivité des termes.

Méthode 2.6 (Utiliser une fonction)**.** Si $u_n = f(n)$ et si f est définie sur un intervalle contenant $\mathbb{N}$, les variations de f peuvent permettre d'établir celles de la suite. Il faut cependant vérifier que les hypothèses sur f sont satisfaites sur l'intervalle considéré.

3 Exemples élémentaires

Exemple 3.1 (Suite arithmétique)**.** Soit $u_n = a + nr$, où $a, r \in \mathbb{R}$. On a

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

La suite est donc croissante si $r \geq 0$, décroissante si $r \leq 0$, et constante si $r = 0$.

Exemple 3.2 (Suite géométrique positive)**.** Soit $u_n = q^n$, avec $q > 0$. On a

$$u_{n+1} - u_n = q^n(q - 1).$$

La suite est croissante si $q \geq 1$ et décroissante si $0 < q \leq 1$. Pour $q = 1$, elle est constante.

Exemple 3.3 (Suite définie par une expression rationnelle)**.** Considérons

$$u_n = \frac{n}{n+1}.$$

Alors

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0.$$

La suite est strictement croissante. De plus,

$$0 \leq u_n < 1.$$

Elle est donc croissante et majorée. Le théorème de convergence des suites monotones permettra d'en déduire sa convergence.

Exemple 3.4 (Une suite non monotone)**.** La suite $u_n = (-1)^n$ n'est ni croissante ni décroissante. Cet exemple rappelle qu'une suite réelle n'est pas nécessairement monotone.

4 Le théorème de convergence des suites monotones

Théorème 4.1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Toute suite réelle croissante et majorée converge vers une limite réelle. Plus précisément, si (u_n) est croissante et majorée, alors*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sup\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

De même, toute suite décroissante et minorée converge vers

$$\inf\{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

4.1 Démonstration pour une suite croissante et majorée

Soit u une suite croissante et majorée. Posons

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

L'ensemble A est non vide et majoré. Par la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$, il possède une borne supérieure

$$\ell = \sup A.$$

Montrons que $u_n \to \ell$.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq \ell.$$

Comme la suite est croissante, pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell.$$

Ainsi,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Par définition de la convergence, $u_n \to \ell$.

4.2 Démonstration pour une suite décroissante et minorée

On applique le résultat précédent à la suite $v_n = -u_n$. Si u est décroissante et minorée, alors v est croissante et majorée. La suite v converge ; par conséquent, $u = -v$ converge également.

Corollaire 4.2. *Une suite monotone converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si elle est bornée.*

Démonstration. Une suite convergente est bornée. Réciproquement, une suite monotone et bornée est soit croissante et majorée, soit décroissante et minorée. Le théorème de convergence monotone s'applique. □

Remarque 4.3. La monotonie seule ne garantit pas la convergence vers un réel. Par exemple, la suite $u_n = n$ est croissante mais non majorée, et tend vers $+\infty$. De même, $u_n = -n$ tend vers $-\infty$.

5 Suites monotones non bornées

Théorème 5.1. *Si une suite croissante n'est pas majorée, alors elle tend vers $+\infty$. Si une suite décroissante n'est pas minorée, alors elle tend vers $-\infty$.*

Démonstration. Considérons une suite croissante (u_n) non majorée. Soit $A \in \mathbb{R}$. Puisque la suite n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > A$.

La suite étant croissante, pour tout $n \geq N$,

$$u_n \geq u_N > A.$$

C'est précisément la définition de

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

Le second résultat s'obtient en considérant la suite $(-u_n)$. □

Corollaire 5.2. *Toute suite monotone possède une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

Remarque 5.3. Il convient de distinguer convergence dans $\mathbb{R}$ et convergence dans la droite réelle achevée. Une limite infinie ne constitue pas une convergence vers un réel.

6 Suites définies par récurrence

Les suites récurrentes sont un terrain privilégié d'application de la monotonie. La méthode classique consiste à établir successivement la stabilité d'un intervalle, la monotonie, puis la convergence.

6.1 Méthode générale

Considérons une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

On procède généralement de la manière suivante :

1. déterminer un intervalle I contenant u_0 ;
2. montrer que $f(I) \subset I$, ce qui assure que $u_n \in I$ pour tout n ;
3. comparer u_{n+1} et u_n, en étudiant par exemple le signe de $f(u_n) - u_n$;
4. déduire la convergence si la suite est monotone et bornée ;
5. si la limite est réelle, utiliser la continuité de f pour obtenir une équation de point fixe.

Remarque 6.1. L'équation $\ell = f(\ell)$ ne suffit pas, à elle seule, à démontrer la convergence. Il faut d'abord établir celle-ci. De plus, l'équation de point fixe peut admettre plusieurs solutions : les bornes et l'intervalle de confinement permettent alors d'identifier la limite.

6.2 Exemple : une suite convergeant vers une racine carrée

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

Montrons que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout $n \geq 1$. On a

$$u_1 = \frac{3}{2} \geq \sqrt{2}.$$

Pour $x > 0$, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2}.$$

Ainsi, tous les termes u_n, pour $n \geq 1$, sont supérieurs ou égaux à $\sqrt{2}$.

Calculons ensuite :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

Pour $n \geq 1$, on a $u_n \geq \sqrt{2}$, donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

La suite est décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq \sqrt{2}$.

Par continuité de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2/x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right).$$

Il vient

$$\ell^2 = 2.$$

Comme $\ell \geq \sqrt{2}$, on obtient

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = \sqrt{2}.}$$

7 Monotonie et comparaison

Proposition 7.1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang et si $u_n \to \ell$ et $v_n \to m$, alors $\ell \leq m$.*

Proposition 7.2 (Théorème des gendarmes)**.** *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Si u_n et w_n convergent vers la même limite ℓ, alors $v_n \to \ell$.

Ces résultats complètent l'étude des suites monotones : les inégalités permettent de transférer des informations de convergence d'une suite à une autre.

Exemple 7.3. Pour $n \geq 1$, considérons

$$u_n = \frac{1}{n}.$$

La suite est décroissante et minorée par 0, donc convergente. Sa limite ℓ vérifie nécessairement $\ell \geq 0$. Pour montrer que cette limite vaut 0, on peut utiliser la propriété archimédienne : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $1/N < \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Ainsi, $u_n \to 0$.

8 Erreurs fréquentes et points de vigilance

— Une suite croissante n'est pas nécessairement strictement croissante.

— Une suite monotone n'est pas nécessairement bornée.

— Une suite bornée n'est pas nécessairement monotone ni convergente.

— La monotonie doit être démontrée sur tous les indices concernés ; elle peut parfois n'être vraie qu'à partir d'un certain rang.

— L'étude du quotient u_{n+1}/u_n n'est pertinente qu'après avoir vérifié que les termes sont non nuls, et il faut notamment contrôler leur signe.

— Pour une suite récurrente, l'équation vérifiée par la limite ne remplace pas la preuve de convergence.

— Une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ne converge pas vers un réel.

9 Liste d'exercices

Les exercices suivants couvrent les principales compétences attendues : calcul de différences, raisonnement par récurrence, convergence monotone, suites récurrentes et contre-exemples.

9.1 Exercice 1 – Étude directe de monotonie

Étudier la monotonie et la bornitude des suites suivantes :

$$u_n = 3 - \frac{2}{n+1}, \qquad v_n = \frac{n+2}{n+1}, \qquad w_n = \frac{n^2+1}{n+1}.$$

Pour chacune, calculer la différence entre deux termes consécutifs et en déduire, lorsque cela est possible, la limite.

9.2 Exercice 2 – Suite géométrique

Soit $u_n = q^n$, avec $q \in \mathbb{R}$. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n) selon les valeurs de q. Traiter séparément les cas $q < 0$, $q = 0$, $0 < q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$.

9.3 Exercice 3 – Suite récurrente et intervalle stable

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1. Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.
2. Montrer que la suite est croissante.
3. En déduire qu'elle converge.
4. Déterminer sa limite.

9.4 Exercice 4 – Suite définie par une fraction

On pose

$$u_n = \frac{n}{n+2}.$$

1. Étudier la monotonie de la suite.
2. Montrer qu'elle est majorée.
3. Déterminer sa limite en utilisant le théorème de convergence monotone, puis vérifier le résultat par le calcul.

9.5 Exercice 5 – Suite récurrente avec paramètre

Soit $a > 0$ et

$$u_0 \geq \sqrt{a}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$ pour tout n.
2. Montrer que (u_n) est décroissante.
3. En déduire sa convergence et déterminer sa limite.

9.6 Exercice 6 – Une suite monotone non bornée

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Démontrer directement, à partir de la définition de la limite infinie, que $u_n \to +\infty$.

9.7 Exercice 7 – Monotonie à partir d'une fonction

Soit $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par

$$f(x) = \frac{x+2}{x+1}.$$

On définit $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer ses points fixes.
3. Discuter la monotonie de (u_n) selon la valeur de u_0.
4. Pour les cas où la suite converge, déterminer sa limite.

9.8 Exercice 8 – Contre-exemples

Donner un exemple de chacune des situations suivantes :

1. une suite bornée qui n'est pas monotone ;
2. une suite monotone qui ne converge pas dans $\mathbb{R}$;
3. une suite convergente qui n'est ni croissante ni décroissante ;
4. une suite non monotone qui converge.

Justifier chaque réponse.

9.9 Exercice 9 – Suite définie par une intégrale

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\, dx.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$.
2. Comparer u_{n+1} et u_n.
3. En déduire que (u_n) converge.
4. Déterminer sa limite.

9.10 Exercice 10 – Approfondissement

Soit (u_n) une suite réelle croissante et convergente vers ℓ. Montrer que

$$u_n \leq \ell \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Étudier ensuite le cas d'une suite décroissante convergente. Préciser les conditions sous lesquelles l'inégalité est stricte.

10 Éléments de correction et indications

— **Exercice 1.** On utilise $u_{n+1} - u_n$. Pour la première suite, la différence est positive ; pour la deuxième, elle est négative. Pour la troisième, on peut écrire

$$w_n = n - 1 + \frac{2}{n+1}.$$

La différence est alors

$$w_{n+1} - w_n = 1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} \geq 0.$$

La suite est croissante et tend vers $+\infty$.

— **Exercice 2.** Le cas $q < 0$ nécessite de distinguer $q = -1$ et $|q| \neq 1$: les signes alternent et la suite n'est généralement pas monotone. Pour $q = -1$, elle n'est pas monotone et ne converge pas. Pour $q = 0$, la suite est constante à partir du rang 1. Si $0 < q < 1$, elle décroît vers 0 ; si $q = 1$, elle est constante ; si $q > 1$, elle croît vers $+\infty$.

— **Exercice 3.** La fonction $f(x) = \sqrt{2+x}$ est croissante sur $[0, +\infty[$. La stabilité de $[0, 2]$ se démontre par récurrence. Pour $0 \leq x \leq 2$, on a $\sqrt{2+x} \geq x$, car $2 + x \geq x^2$. La suite est donc croissante et majorée par 2. Sa limite vérifie $\ell = \sqrt{2+\ell}$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$. Comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2$.

— **Exercice 4.** On obtient

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{(n+2)(n+3)} > 0.$$

La suite est croissante et majorée par 1 ; sa limite est 1.

— **Exercice 5.** L'inégalité arithmético-géométrique donne $u_{n+1} \geq \sqrt{a}$. De plus,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a - u_n^2}{2u_n} \leq 0.$$

La suite converge vers $\ell \geq \sqrt{a}$ et l'équation $\ell = (\ell + a/\ell)/2$ donne $\ell = \sqrt{a}$.

— **Exercice 6.** Pour tout $A \in \mathbb{R}$, la non-majoration fournit un indice N tel que $u_N > A$. La croissance implique $u_n > A$ pour tout $n \geq N$.

— **Exercice 7.** La fonction est strictement décroissante, car

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

Le seul point fixe positif est $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$. La suite n'est pas nécessairement monotone ; on peut étudier les sous-suites paires et impaires ou utiliser la relation de récurrence pour analyser son comportement. Cet exercice permet de rappeler que la monotonie de f n'entraîne pas celle de (u_n).

— **Exercice 8.** Exemples : $(-1)^n$; n ; $1/(n+1) + (-1)^n/(n+1)^2$ (à vérifier pour les variations) ; $(-1)^n/(n+1)$.

— **Exercice 9.** On a

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}\, dx \leq 0.$$

La suite est positive et décroissante, donc convergente. Pour $0 \leq x < 1$, $x^n \to 0$; le théorème de convergence dominée donne une limite nulle.

— **Exercice 10.** Si $u_n > \ell$ pour un indice n, la croissance implique $u_p \geq u_n > \ell$ pour tout $p \geq n$, ce qui contredit la convergence vers ℓ. Ainsi $u_n \leq \ell$. Pour une suite décroissante, on obtient $u_n \geq \ell$.

11 Références bibliographiques

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les suites réelles, la convergence, les théorèmes fondamentaux et les exercices d'analyse.

[2] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques tout-en-un pour la Licence*, Dunod. Cours et exercices d'analyse, notamment sur les suites numériques et les propriétés de $\mathbb{R}$.

[3] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Présentation structurée des suites, de la monotonie et des méthodes de convergence.

[4] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill. Référence théorique pour les propriétés de complétude de $\mathbb{R}$ et les suites réelles.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. À consulter pour situer les notions de suites, de variations et de convergence dans les programmes scolaires en vigueur.

12 Conclusion

Les suites monotones constituent un outil fondamental de l'analyse. Le résultat central est le théorème de convergence monotone : une suite croissante majorée ou décroissante minorée converge dans $\mathbb{R}$. La preuve repose sur la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Dans les exercices et les problèmes de suites récurrentes, la stratégie essentielle consiste à démontrer la monotonie et une borne adaptée, puis à déterminer la limite éventuelle. Il faut toujours distinguer l'établissement de la convergence de la détermination de la limite.