**Leçon d'oral de CAPES**

# Convergence de suites réelles

Analyse réelle

## Table des matières


**1 Prérequis et objectifs** **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2

**2 Définition et premières propriétés** **2**
- 2.1 Définition de la convergence . . . 2
- 2.2 Exemples fondamentaux . . . 3

**3 Suites bornées et opérations sur les limites** **3**
- 3.1 Toute suite convergente est bornée . . . 3
- 3.2 Limites et ordre . . . 3
- 3.3 Opérations algébriques . . . 4

**4 Théorèmes fondamentaux de convergence** **4**
- 4.1 Théorème d'encadrement . . . 4
- 4.2 Théorème de convergence monotone . . . 5
- 4.3 Suites adjacentes . . . 6
- 4.4 Critère de Cauchy . . . 6

**5 Sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass** **7**

**6 Limites infinies et divergence** **7**
- 6.1 Limites infinies . . . 7
- 6.2 Divergence sans limite infinie . . . 7

**7 Étude des suites définies par récurrence** **8**
- 7.1 Méthode générale . . . 8
- 7.2 Exemple : une suite convergeant vers une racine carrée . . . 8

**8 Synthèse et points de vigilance** **9**

**9 Liste d'exercices** **9**

**10 Références bibliographiques** **11**

# 1 Prérequis et objectifs

## 1.1 Prérequis

Cette leçon suppose connus :

— les propriétés algébriques et d'ordre de $\mathbb{R}$ ;

— la notion de valeur absolue et les inégalités usuelles ;

— les notions de majorant, de minorant, de maximum et de minimum ;

— les suites définies explicitement ou par récurrence ;

— les opérations sur les inégalités et les raisonnements par récurrence ;

— la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

## 1.2 Objectifs

L'objectif est de caractériser la convergence d'une suite réelle et d'étudier les méthodes permettant de l'établir. On cherchera à maîtriser la définition $\varepsilon$ de la limite, les propriétés algébriques des limites, le théorème d'encadrement, le théorème de convergence des suites monotones et le critère de Cauchy.

La leçon doit également montrer comment ces résultats permettent d'étudier des suites définies par récurrence, d'établir l'existence de certaines limites et de distinguer convergence et divergence. Une attention particulière sera portée à la justification des limites et aux hypothèses nécessaires à chaque théorème.

# 2 Définition et premières propriétés

## 2.1 Définition de la convergence

**Définition 2.1.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que $(u_n)$ converge vers $\ell$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

On écrit alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \qquad \text{ou} \qquad u_n \longrightarrow \ell.$$

Le réel $\ell$ est appelé limite de la suite.

La définition signifie qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle

$$]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[,$$

quelle que soit la précision $\varepsilon > 0$ choisie.

**Remarque 2.2.** La convergence ne dépend pas d'un nombre fini de termes. Si deux suites sont égales à partir d'un certain rang, elles sont simultanément convergentes ou divergentes et, lorsqu'elles convergent, elles ont la même limite.

**Propriété 2.3** (Unicité de la limite)**.** *Une suite réelle ne peut avoir deux limites distinctes.*

*Démonstration.* Supposons que $(u_n)$ converge vers $\ell$ et vers $m$. Si $\ell \neq m$, posons

$$\varepsilon = \frac{|\ell - m|}{3} > 0.$$

Pour $n$ assez grand, on a simultanément

$$|u_n - \ell| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad |u_n - m| < \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$|\ell - m| \leq |\ell - u_n| + |u_n - m| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - m|,$$

ce qui est impossible. Ainsi $\ell = m$. □

### 2.2 Exemples fondamentaux

**Exemple 2.4.** La suite constante $u_n = c$ converge vers $c$, car

$$|u_n - c| = 0 < \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exemple 2.5.** La suite $u_n = 1/n$ converge vers 0. En effet, pour $\varepsilon > 0$, choisissons un entier $N > 1/\varepsilon$. Pour tout $n \geq N$, on a

$$|u_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

**Exemple 2.6.** La suite $u_n = (-1)^n$ ne converge pas : ses sous-suites de rang pair et impair sont constantes, de valeurs respectives 1 et $-1$. Si la suite convergeait, ces deux sous-suites auraient la même limite, ce qui est impossible.

## 3 Suites bornées et opérations sur les limites

### 3.1 Toute suite convergente est bornée

**Théorème 3.1.** *Toute suite réelle convergente est bornée.*

*Démonstration.* Soit $u_n \to \ell$. Par définition, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < 1.$$

Ainsi, pour $n \geq N$,

$$|u_n| < |\ell| + 1.$$

Les termes $u_0, \ldots, u_{N-1}$ sont en nombre fini et sont donc bornés. L'ensemble de tous les termes de la suite est par conséquent borné. □

**Remarque 3.2.** La réciproque est fausse : la suite $u_n = (-1)^n$ est bornée, mais elle ne converge pas.

### 3.2 Limites et ordre

**Théorème 3.3** (Passage à la limite dans une inégalité)**.** *Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites convergeant respectivement vers $\ell$ et $m$. Si*

$$u_n \leq v_n$$

*à partir d'un certain rang, alors*

$$\ell \leq m.$$

*Démonstration.* Supposons par l'absurde que $\ell > m$ et posons

$$\varepsilon = \frac{\ell - m}{3}.$$

Pour $n$ assez grand,

$$u_n > \ell - \varepsilon \quad \text{et} \quad v_n < m + \varepsilon.$$

Or $\ell - \varepsilon > m + \varepsilon$, donc $u_n > v_n$, contradiction. □

**Propriété 3.4** (Conservation du signe strict)**.** *Si $u_n \to \ell$ avec $\ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.*

*Démonstration.* On applique la définition avec $\varepsilon = \ell/2$ : pour $n$ assez grand,

$$u_n > \ell - \frac{\ell}{2} = \frac{\ell}{2} > 0.$$

□

### 3.3 Opérations algébriques

**Théorème 3.5** (Opérations sur les limites)**.** *Soient $u_n \to \ell$ et $v_n \to m$. Alors :*

*a)* $u_n + v_n \to \ell + m$ ;

*b)* $\lambda u_n \to \lambda \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$ ;

*c)* $u_n v_n \to \ell m$ ;

*d) si $m \neq 0$ et si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors*

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow \frac{\ell}{m}.$$

Ces résultats découlent des identités algébriques, de l'inégalité triangulaire et du fait qu'une suite convergente est bornée.

**Corollaire 3.6.** *Si $u_n \to \ell$ et si $f$ est une fonction réelle définie au voisinage de $\ell$, continue en $\ell$, alors, dès que $f(u_n)$ est défini à partir d'un certain rang,*

$$f(u_n) \longrightarrow f(\ell).$$

**Exemple 3.7.** Comme $1/n \to 0$, on obtient

$$\frac{3n^2 + 2n + 1}{n^2 - 4n + 5} = \frac{3 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 - \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} \longrightarrow 3.$$

## 4 Théorèmes fondamentaux de convergence

### 4.1 Théorème d'encadrement

**Théorème 4.1** (Théorème des gendarmes)**.** *Soient $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ trois suites réelles. Supposons qu'à partir d'un certain rang,*

$$u_n \leq v_n \leq w_n,$$

*et que*

$$u_n \longrightarrow \ell, \qquad w_n \longrightarrow \ell.$$

*Alors*

$$v_n \longrightarrow \ell.$$

*Démonstration.* Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N$ tel que, pour $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon < u_n \leq v_n \leq w_n < \ell + \varepsilon.$$

Ainsi $|v_n - \ell| < \varepsilon$, ce qui prouve la convergence de $(v_n)$ vers $\ell$. □

**Exemple 4.2.** Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \frac{|\sin n|}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Comme $1/n \to 0$, le théorème d'encadrement donne

$$\frac{|\sin n|}{n} \longrightarrow 0.$$

## 4.2 Théorème de convergence monotone

**Définition 4.3.** Une suite $(u_n)$ est croissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

Elle est décroissante si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} \leq u_n.$$

Une suite est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

**Théorème 4.4** (Convergence monotone)**.** *a) Toute suite croissante et majorée converge. Sa limite est la borne supérieure de l'ensemble de ses termes.*

*b) Toute suite décroissante et minorée converge. Sa limite est la borne inférieure de l'ensemble de ses termes.*

*Démonstration.* Démontrons le premier point. Soit $(u_n)$ une suite croissante et majorée. L'ensemble

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide et majoré. Par complétude de $\mathbb{R}$, il admet une borne supérieure $\ell = \sup A$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\ell - \varepsilon$ n'est pas un majorant de $A$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$u_N > \ell - \varepsilon.$$

La croissance donne, pour tout $n \geq N$,

$$\ell - \varepsilon < u_N \leq u_n \leq \ell.$$

Donc $|u_n - \ell| < \varepsilon$. La suite converge vers $\ell$.

Le second point s'obtient en appliquant le premier à la suite $(-u_n)$, qui est croissante et majorée. □

**Remarque 4.5.** La monotonie seule ne suffit pas : la suite $u_n = n$ est croissante, mais ne converge pas dans $\mathbb{R}$. De même, la suite $u_n = -n$ est décroissante et ne converge pas dans $\mathbb{R}$.

## 4.3 Suites adjacentes

**Définition 4.6.** Deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ sont dites adjacentes si :

— $(u_n)$ est croissante ;

— $(v_n)$ est décroissante ;

— $v_n - u_n \to 0$.

**Théorème 4.7.** *Deux suites adjacentes convergent vers une même limite.*

*Démonstration.* La suite $(u_n)$ est majorée par $v_0$, car $u_n \leq v_n \leq v_0$. Elle converge donc vers une limite $\ell$. De même, $(v_n)$ est minorée par $u_0$ et converge vers une limite $m$. Puisque $v_n - u_n \to 0$, on obtient $m - \ell = 0$. Ainsi $\ell = m$. □

**Exemple 4.8.** On peut utiliser deux suites adjacentes pour encadrer une limite, construire des approximations numériques et contrôler leur erreur. La méthode de dichotomie fournit un exemple classique de cette démarche.

## 4.4 Critère de Cauchy

**Définition 4.9.** Une suite $(u_n)$ est une suite de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

**Théorème 4.10** (Critère de Cauchy dans $\mathbb{R}$)**.** *Une suite réelle converge si et seulement si elle est une suite de Cauchy.*

*Démonstration.* Si $u_n \to \ell$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N$ tel que, pour $p, q \geq N$,

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \varepsilon.$$

La suite est donc de Cauchy.

Réciproquement, une suite de Cauchy est bornée. En effet, en prenant $\varepsilon = 1$, tous les termes à partir d'un certain rang sont à distance inférieure à 1 d'un terme fixé. Les premiers termes étant en nombre fini, la suite est bornée.

Le théorème de Bolzano-Weierstrass garantit alors l'existence d'une sous-suite $(u_{\varphi(k)})$ convergeant vers un réel $\ell$. Montrons que la suite entière converge vers $\ell$.

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $(u_n)$ est de Cauchy, il existe $N$ tel que

$$p, q \geq N \Longrightarrow |u_p - u_q| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $\varphi(k) \to +\infty$ et $u_{\varphi(k)} \to \ell$, on peut choisir $k$ suffisamment grand pour que $\varphi(k) \geq N$ et

$$\left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $n \geq N$, on a alors

$$|u_n - \ell| \leq \left|u_n - u_{\varphi(k)}\right| + \left|u_{\varphi(k)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

La suite converge donc vers $\ell$. □

**Remarque 4.11.** Le critère de Cauchy caractérise la convergence sans connaître la limite éventuelle. Il repose ici sur la complétude de $\mathbb{R}$.

# 5 Sous-suites et théorème de Bolzano-Weierstrass

**Définition 5.1.** Soit $(u_n)$ une suite réelle. Une sous-suite de $(u_n)$ est une suite de la forme $(u_{\varphi(k)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

**Propriété 5.2.** *Si $u_n \to \ell$, alors toute sous-suite de $(u_n)$ converge vers $\ell$.*

*Démonstration.* Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N$ tel que $n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$. Comme $\varphi(k) \to +\infty$, on a $\varphi(k) \geq N$ pour $k$ assez grand. Ainsi

$$u_{\varphi(k)} \longrightarrow \ell.$$

□

**Théorème 5.3** (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite réelle bornée possède une sous-suite convergente.*

Ce théorème est fondamental en analyse. Il ne garantit pas que la suite entière converge, mais assure l'existence d'au moins une valeur d'adhérence pour toute suite bornée.

**Exemple 5.4.** La suite $u_n = (-1)^n$ est bornée et possède deux sous-suites convergentes :

$$u_{2n} = 1 \longrightarrow 1, \qquad u_{2n+1} = -1 \longrightarrow -1.$$

Elle ne converge donc pas.

**Corollaire 5.5.** *Une suite réelle converge vers $\ell$ si et seulement si toutes ses sous-suites convergent vers $\ell$.*

# 6 Limites infinies et divergence

## 6.1 Limites infinies

**Définition 6.1.** On dit que $u_n \to +\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad u_n > A.$$

On définit de même $u_n \to -\infty$ en remplaçant $u_n > A$ par $u_n < A$.

**Exemple 6.2.** On a

$$n \longrightarrow +\infty, \qquad -n \longrightarrow -\infty, \qquad n^2 \longrightarrow +\infty.$$

**Propriété 6.3.** *Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

*Démonstration.* Soit $(u_n)$ croissante et non majorée. Pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $N$ tel que $u_N > A$. Pour tout $n \geq N$, la croissance donne $u_n \geq u_N > A$. Donc $u_n \to +\infty$. Le second résultat se démontre de façon analogue. □

## 6.2 Divergence sans limite infinie

La suite $u_n = (-1)^n$ ne possède ni limite réelle ni limite infinie. Il faut donc distinguer :

— la convergence vers un réel ;

— la divergence vers $+\infty$ ou $-\infty$ ;

— la divergence sans limite, comme pour $(-1)^n$.

Ces situations ne doivent pas être confondues.

# 7 Étude des suites définies par récurrence

Les suites récurrentes illustrent la combinaison de la monotonie, du bornage et des propriétés des limites.

## 7.1 Méthode générale

Pour étudier une suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

on peut suivre les étapes suivantes :

1. déterminer un intervalle stable par $f$ ;
2. démontrer par récurrence que $u_n$ appartient à cet intervalle ;
3. étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ ;
4. en déduire la monotonie ;
5. établir un majorant ou un minorant ;
6. appliquer le théorème de convergence monotone ;
7. si $u_n \to \ell$ et si $f$ est continue en $\ell$, passer à la limite dans la relation de récurrence :

$$\ell = f(\ell).$$

8. vérifier que la limite obtenue est compatible avec les contraintes établies sur la suite.

## 7.2 Exemple : une suite convergeant vers une racine carrée

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).$$

**Étape 1 : positivité et minoration.** On montre par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2} > 0$. C'est vrai au rang initial. Si $u_n \geq \sqrt{2}$, alors

$$u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0.$$

**Étape 2 : monotonie.** Pour tout $n$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n} \leq 0.$$

La suite est donc décroissante.

**Étape 3 : convergence.** La suite est décroissante et minorée par $\sqrt{2}$. Elle converge donc vers un réel $\ell \geq \sqrt{2}$.

**Étape 4 : calcul de la limite.** La fonction $x \mapsto \frac{1}{2}(x + 2/x)$ est continue sur $]0, +\infty[$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right),$$

d'où

$$\ell^2 = 2.$$

Comme $\ell > 0$, on conclut que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{2}.}$$

Cet exemple illustre une méthode essentielle : la recherche d'une limite par l'équation de récurrence doit être précédée d'une preuve de convergence.

# 8 Synthèse et points de vigilance

Les principaux outils de cette leçon sont :

— la définition $\varepsilon$ de la convergence ;

— l'unicité de la limite et le caractère borné des suites convergentes ;

— les opérations sur les limites et le passage à la limite dans les inégalités ;

— le théorème d'encadrement ;

— le théorème de convergence monotone ;

— le critère de Cauchy ;

— le théorème de Bolzano-Weierstrass et l'étude des sous-suites.

Pour une présentation orale, plusieurs erreurs classiques doivent être évitées :

1. Une suite bornée n'est pas nécessairement convergente.
2. Une suite monotone n'est pas nécessairement convergente dans $\mathbb{R}$ : il faut aussi un bornage adapté.
3. Résoudre $\ell = f(\ell)$ ne prouve pas à lui seul la convergence d'une suite récurrente.
4. On ne peut passer à la limite dans une relation qu'après avoir établi la convergence des suites concernées et vérifié les hypothèses nécessaires.
5. Une suite convergente a une seule limite, mais ses sous-suites peuvent être utilisées pour démontrer qu'une suite ne converge pas.

La question centrale est celle de la complétude de $\mathbb{R}$ : elle permet de passer du bornage ou du caractère de Cauchy à l'existence d'une limite. Le théorème de convergence monotone en est une manifestation particulièrement utile.

# 9 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de travailler les définitions, les théorèmes et les méthodes de preuve présentés dans la leçon.

### Exercice 1 : preuve directe de convergence

À l'aide de la définition $\varepsilon$ de la convergence, démontrer que les suites suivantes convergent et déterminer leur limite :

$$u_n = \frac{3n+1}{n+2}, \qquad v_n = \frac{n}{n^2+1}.$$

### Exercice 2 : unicité et bornage

a) Démontrer qu'une suite convergente est bornée.

b) Montrer que la réciproque est fausse.

c) Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers $\ell$. Démontrer que $|u_n| \to |\ell|$.

### Exercice 3 : théorème d'encadrement

Étudier la convergence de

$$u_n = \frac{\sin(n^2)}{n} \qquad (n \geq 1).$$

Donner une preuve utilisant le théorème d'encadrement.

### Exercice 4 : monotonie et convergence

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

a) Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n$.

b) Montrer que $(u_n)$ est croissante.

c) En déduire sa convergence.

d) Déterminer sa limite.

### Exercice 5 : suite récurrente contractante

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit

$$u_0 \in \mathbb{R}, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + a}{2}.$$

a) Déterminer une expression de $u_n$ en fonction de $n$, $u_0$ et $a$.

b) Étudier la convergence de $(u_n)$.

c) Retrouver la limite à partir de la relation de récurrence.

### Exercice 6 : suites adjacentes

On pose, pour $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}.$$

Étudier les variations des deux suites et déterminer si elles sont adjacentes. Justifier la réponse.

### Exercice 7 : critère de Cauchy

Soit $(u_n)$ une suite réelle telle que

$$|u_{n+1} - u_n| \leq \frac{1}{2^n} \qquad (n \geq 1).$$

a) Montrer que, pour $p > n$,

$$|u_p - u_n| \leq \sum_{k=n}^{p-1} \frac{1}{2^k}.$$

b) En déduire que $(u_n)$ est une suite de Cauchy.

c) Conclure sur sa convergence.

### Exercice 8 : sous-suites

Soit

$$u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Étudier les sous-suites $(u_{4n})$, $(u_{4n+1})$, $(u_{4n+2})$ et $(u_{4n+3})$. En déduire que $(u_n)$ ne converge pas.

### Exercice 9 : limite infinie

Soit $(u_n)$ une suite croissante et non majorée. Démontrer directement, à partir de la définition, que

$$u_n \longrightarrow +\infty.$$

Donner un exemple de suite croissante et majorée, puis un exemple de suite croissante non majorée.

### Exercice 10 : méthode de Newton

Soit

$$u_0 \geq \sqrt{a}, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right), \qquad a > 0.$$

a) Montrer que $u_n \geq \sqrt{a}$.

b) Montrer que $(u_n)$ est décroissante.

c) En déduire sa convergence.

d) Déterminer sa limite.

## 10 Références bibliographiques

## Références


[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les suites réelles, les limites, la continuité et les théorèmes fondamentaux d'analyse.

[2] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1976. Référence théorique sur les suites, la complétude de $\mathbb{R}$ et les fondements de l'analyse réelle.

[3] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini. Ouvrage utile pour consolider les raisonnements d'analyse et les méthodes de preuve, notamment en lien avec les applications des suites.

[4] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Présentation des suites numériques, de la convergence, des suites récurrentes et des théorèmes usuels d'analyse.

[5] Commission internationale de l'enseignement mathématique, ressources et programmes de mathématiques du secondaire et du supérieur, selon les éditions et les niveaux. À consulter pour situer les notions de limites et de suites dans leur progression pédagogique.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique* et documents officiels relatifs aux concours de recrutement des enseignants. Documents à consulter dans leur version en vigueur pour adapter les contenus aux attendus institutionnels du CAPES.