Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Suites arithmétiques, suites géométriques

Table des matières

1 Introduction **2**

1.1 Prérequis et objectifs 2

2 Suites arithmétiques **2**

2.1 Définition et caractérisations 2

2.2 Variations 3

2.3 Limite 3

2.4 Somme des termes consécutifs 3

3 Suites géométriques **4**

3.1 Définition et caractérisations 4

3.2 Variations et signe 5

3.3 Limites 5

3.4 Somme des termes d'une suite géométrique 5

3.5 Somme d'une série géométrique convergente 6

4 Comparaison des deux familles **6**

4.1 Tableau récapitulatif 6

4.2 Lien avec les fonctions 6

5 Applications **7**

5.1 Évolution d'un salaire 7

5.2 Capitalisation à intérêts composés 7

5.3 Décroissance d'une quantité 7

6 Exercices proposés **7**

7 Éléments de correction **10**

8 Points de vigilance pour l'oral **12**

9 Références bibliographiques **12**

1 Introduction

Les suites arithmétiques et géométriques constituent deux modèles fondamentaux pour décrire l'évolution d'une grandeur discrète. Elles interviennent notamment dans les problèmes d'évolution linéaire, de croissance exponentielle, de capitalisation et de décroissance régulière.

Une suite arithmétique est caractérisée par un accroissement constant entre deux termes consécutifs. Une suite géométrique est caractérisée par un rapport constant entre deux termes consécutifs, lorsque ce rapport est défini.

Ces deux familles permettent d'introduire les notions de récurrence, de formule explicite, de variation, de limite et de somme de termes d'une suite.

1.1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Les connaissances nécessaires comprennent :

- le calcul algébrique et la manipulation des fractions ;
- les puissances entières, notamment les puissances d'un nombre réel ;
- la notion de fonction affine et les propriétés élémentaires des fonctions exponentielles ;
- la définition d'une suite numérique et les modes de génération d'une suite ;
- les notions d'inégalité, de signe et de variation.

Objectifs. À l'issue de cette leçon, on doit savoir :

- définir et reconnaître une suite arithmétique ou géométrique ;
- passer d'une définition par récurrence à une formule explicite ;
- établir les formules de sommes correspondantes ;
- étudier les variations et les limites de ces suites ;
- modéliser une situation concrète à l'aide de ces suites et interpréter les résultats obtenus ;
- distinguer une croissance additive d'une croissance multiplicative.

2 Suites arithmétiques

2.1 Définition et caractérisations

Définition 2.1. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le nombre r représente l'accroissement constant entre deux termes consécutifs.

Propriété 2.2. *Une suite (u_n) est arithmétique de raison r si et seulement si*

$$u_{n+1} - u_n = r$$

pour tout indice considéré.

Propriété 2.3. *Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r, alors*

$$\boxed{u_n = u_0 + nr}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, pour tous entiers p, n tels que $n \geq p$,

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}.$$

Démonstration. La relation de récurrence donne

$$u_1 = u_0 + r, \quad u_2 = u_1 + r = u_0 + 2r.$$

En poursuivant, on obtient la formule annoncée.

On peut aussi procéder par récurrence. La propriété est vraie au rang 0. Si $u_n = u_0 + nr$, alors

$$u_{n+1} = u_n + r = u_0 + nr + r = u_0 + (n+1)r.$$

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n. □

Exemple 2.4. Considérons la suite définie par

$$u_0 = 5, \qquad u_{n+1} = u_n - 3.$$

Il s'agit d'une suite arithmétique de raison -3, et

$$u_n = 5 - 3n.$$

Ainsi, $u_{10} = -25$.

2.2 Variations

Propriété 2.5. *Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.*

- *Si $r > 0$, la suite est strictement croissante.*
- *Si $r < 0$, la suite est strictement décroissante.*
- *Si $r = 0$, la suite est constante.*

Démonstration. Pour tout n,

$$u_{n+1} - u_n = r.$$

Le signe de la différence détermine le sens de variation. □

2.3 Limite

La formule explicite $u_n = u_0 + nr$ permet d'étudier directement la limite de la suite.

Propriété 2.6. *Pour une suite arithmétique de raison r :*

Condition	*Limite*
$r > 0$	$+\infty$
$r < 0$	$-\infty$
$r = 0$	u_0

2.4 Somme des termes consécutifs

Propriété 2.7. *Pour une suite arithmétique (u_n), on a*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}}.$$

Plus généralement, pour $n \geq p$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = \frac{(n-p+1)(u_p + u_n)}{2}}.$$

Démonstration. Posons

$$S = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

En écrivant la somme dans l'ordre inverse,

$$S = u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0.$$

En additionnant terme à terme,

$$2S = (n+1)(u_0 + u_n).$$

D'où la formule. □

Exemple 2.8. La somme des entiers de 1 à 100 vaut

$$1 + 2 + \cdots + 100 = \frac{100(1+100)}{2} = 5050.$$

3 Suites géométriques

3.1 Définition et caractérisations

Définition 3.1. Une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q si

$$\boxed{u_{n+1} = qu_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, où q est un réel fixé.

La relation reste valable même lorsque certains termes sont nuls. En revanche, le quotient u_{n+1}/u_n n'est utilisable que lorsque $u_n \neq 0$.

Propriété 3.2. *Si (u_n) est géométrique de raison q, alors*

$$\boxed{u_n = u_0 q^n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, pour $n \geq p$,

$$\boxed{u_n = u_p q^{n-p}}.$$

Démonstration. La relation de récurrence donne

$$u_1 = u_0 q, \quad u_2 = u_0 q^2.$$

Une récurrence établit ensuite que $u_n = u_0 q^n$ pour tout n. □

Exemple 3.3. Soit la suite définie par

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = 3u_n.$$

Elle est géométrique de raison 3, et

$$u_n = 2 \cdot 3^n.$$

On obtient notamment $u_4 = 162$.

3.2 Variations et signe

Le comportement d'une suite géométrique dépend de sa raison, mais aussi du signe de son premier terme.

Propriété 3.4. *Supposons $u_0 > 0$.*

- *Si $q > 1$, la suite est strictement croissante.*
- *Si $q = 1$, elle est constante.*
- *Si $0 < q < 1$, elle est strictement décroissante.*
- *Si $q = 0$, elle est nulle à partir du rang 1.*

Si $q < 0$, les termes non nuls changent de signe à chaque rang : la suite n'est alors pas monotone.

Démonstration. Lorsque $u_0 > 0$ et $q > 0$,

$$u_{n+1} - u_n = u_n(q - 1).$$

Le terme u_n étant positif, le signe de cette différence est celui de $q - 1$. □

3.3 Limites

Propriété 3.5. *Pour une suite géométrique $u_n = u_0 q^n$:*

- *si $|q| < 1$, alors $u_n \to 0$;*
- *si $q = 1$, la suite est constante égale à u_0 ;*
- *si $q > 1$ et $u_0 > 0$, alors $u_n \to +\infty$;*
- *si $q > 1$ et $u_0 < 0$, alors $u_n \to -\infty$;*
- *si $q = -1$, la suite alterne entre u_0 et $-u_0$ et ne converge pas, sauf si $u_0 = 0$;*
- *si $q < -1$ et $u_0 \neq 0$, la suite ne converge pas.*

Le cas $q = 0$ donne une suite nulle à partir du rang 1. Les cas $u_0 = 0$ donnent toujours une suite nulle.

3.4 Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété 3.6. *Pour $q \neq 1$,*

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}.$$

Pour $q = 1$, cette somme vaut $(n + 1)u_0$.

Plus généralement, pour $q \neq 1$,

$$\boxed{\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}}.$$

Démonstration. Posons

$$S = u_0 + u_0 q + \cdots + u_0 q^n.$$

Alors

$$qS = u_0 q + u_0 q^2 + \cdots + u_0 q^{n+1}.$$

En soustrayant,

$$S - qS = u_0 - u_0 q^{n+1}.$$

Ainsi,

$$(1-q)S = u_0(1-q^{n+1}),$$

ce qui donne le résultat lorsque $q \neq 1$. □

Exemple 3.7. La somme

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{10}$$

vaut

$$\frac{1-2^{11}}{1-2} = 2047.$$

3.5 Somme d'une série géométrique convergente

Lorsque $|q| < 1$, la limite $q^{n+1} \to 0$ donne

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} u_0 q^k = \frac{u_0}{1-q}}.$$

Cette égalité concerne la somme d'une série convergente ; elle ne doit pas être confondue avec une somme finie.

4 Comparaison des deux familles

4.1 Tableau récapitulatif

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Récurrence	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q u_n$
Paramètre	raison r	raison q
Terme général	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = u_0 q^n$
Somme	$\dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$	$u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Modèle	variation additive	variation multiplicative

Dans la formule de la somme géométrique, la dernière expression suppose $q \neq 1$.

4.2 Lien avec les fonctions

Une suite arithmétique est la restriction à $\mathbb{N}$ d'une fonction affine :

$$f(x) = u_0 + rx.$$

Une suite géométrique est définie par une expression exponentielle lorsque la raison est positive :

$$u_n = u_0 q^n.$$

Si $q > 0$, on peut également écrire, pour $u_0 > 0$,

$$u_n = u_0 e^{n \ln q}.$$

Cette comparaison permet de distinguer une évolution linéaire d'une évolution exponentielle.

5 Applications

5.1 Évolution d'un salaire

Un salarié perçoit un salaire mensuel de référence de 1 800 euros. Son salaire augmente de 40 euros chaque année.

En notant u_n son salaire après n augmentations, on obtient

$$u_0 = 1800, \qquad u_{n+1} = u_n + 40.$$

La suite est arithmétique et

$$u_n = 1800 + 40n.$$

Après dix augmentations, le salaire atteint 2 200 euros.

Ce modèle suppose que l'augmentation annuelle est fixe.

5.2 Capitalisation à intérêts composés

Un capital de 1 000 euros est placé à un taux annuel de 3 %, avec intérêts capitalisés une fois par an.

En notant v_n le capital après n années,

$$v_0 = 1000, \qquad v_{n+1} = 1{,}03 v_n.$$

Ainsi,

$$v_n = 1000(1{,}03)^n.$$

Après dix ans,

$$v_{10} = 1000(1{,}03)^{10} \approx 1343{,}92.$$

Le modèle suppose que le taux reste constant et qu'aucun versement ni retrait supplémentaire n'est effectué.

5.3 Décroissance d'une quantité

Une substance perd chaque heure 20 % de sa quantité. Si la quantité initiale est de 500 grammes, alors

$$w_0 = 500, \qquad w_{n+1} = 0{,}8 w_n.$$

La quantité restante après n heures est

$$w_n = 500(0{,}8)^n.$$

Puisque $0 < 0{,}8 < 1$, cette quantité tend vers zéro.

6 Exercices proposés

Exercice 1 – Reconnaître une suite arithmétique

On considère la suite définie par

$$u_n = 7 - 4n.$$

1. Calculer u_0, u_1 et u_5.
2. Montrer que la suite est arithmétique.
3. Donner sa raison et étudier ses variations.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{20} u_k$.

Exercice 2 – Déterminer une suite arithmétique

Une suite arithmétique vérifie

$$u_3 = 11, \qquad u_8 = 31.$$

1. Déterminer sa raison.
2. Calculer u_0.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 100$.

Exercice 3 – Reconnaître une suite géométrique

On considère

$$v_n = 5\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

1. Déterminer v_0, v_1 et v_4.
2. Justifier que la suite est géométrique.
3. Étudier ses variations et sa limite.
4. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exercice 4 – Déterminer une suite géométrique

Une suite géométrique à termes positifs vérifie

$$v_2 = 12, \qquad v_5 = 96.$$

1. Déterminer sa raison.
2. Calculer v_0.
3. Donner son terme général.
4. Calculer la somme des six premiers termes.

Exercice 5 – Épargne régulière

Une personne dispose initialement de 200 euros et ajoute 50 euros à la fin de chaque mois.

1. Modéliser le capital par une suite arithmétique.
2. Calculer le capital après douze versements.
3. Déterminer le nombre de versements nécessaires pour disposer d'au moins 1 000 euros.

On néglige les intérêts et les éventuels frais.

Exercice 6 – Placement à intérêts composés

Un capital de 2 500 euros est placé à un taux annuel de 2,5 %.

1. Définir une suite modélisant le capital.
2. Calculer le capital après huit ans.
3. Déterminer le plus petit entier n tel que le capital dépasse 3 000 euros.
4. Expliquer pourquoi le modèle est géométrique.

Exercice 7 – Étude d'une suite géométrique

Soit

$$u_0 = 8, \qquad u_{n+1} = -\frac{3}{2}u_n.$$

1. Donner le terme général.
2. Étudier le signe des termes.
3. La suite est-elle monotone ?
4. Admet-elle une limite ?

Exercice 8 – Somme et convergence

Pour $0 < q < 1$, on considère la suite

$$u_n = q^n.$$

1. Calculer la somme des $n + 1$ premiers termes.
2. Déterminer la limite de cette somme lorsque n tend vers $+\infty$.
3. Interpréter le résultat dans le cas $q = 0{,}9$.

Exercice 9 – Problème de modélisation

Une population de bactéries compte initialement 10 000 individus. Dans un modèle simplifié, elle augmente de 8 % par heure.

1. Définir une suite décrivant cette population.
2. Estimer la population après six heures.
3. Déterminer le premier rang où la population dépasse 15 000.
4. Discuter les limites du modèle dans une situation biologique réelle.

Exercice 10 – Question de synthèse

On souhaite distinguer deux évolutions :

$$u_{n+1} = u_n + 5, \qquad v_{n+1} = 1{,}05v_n,$$

avec $u_0 = v_0 = 100$.

1. Donner les expressions explicites des deux suites.
2. Calculer leurs termes au rang 10.
3. Comparer leurs évolutions.
4. Expliquer pourquoi une hausse fixe et une hausse proportionnelle conduisent à des modèles différents.

7 Éléments de correction

Exercice 1

On a $u_0 = 7$, $u_1 = 3$ et $u_5 = -13$. La raison vaut -4, donc la suite est strictement décroissante. Enfin,

$$\sum_{k=0}^{20} u_k = \frac{21(7-73)}{2} = -693,$$

car $u_{20} = 7 - 80 = -73$.

Exercice 2

La raison est

$$r = \frac{u_8 - u_3}{8-3} = \frac{31-11}{5} = 4.$$

Donc $u_0 = u_3 - 3r = -1$ et $u_n = -1 + 4n$. La condition $u_n \geq 100$ équivaut à $n \geq 25{,}25$. Le plus petit entier convenable est $n = 26$.

Exercice 3

La raison vaut $q = 2/3$. La suite est positive, strictement décroissante et converge vers zéro. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} v_k = 5\frac{1-(2/3)^{n+1}}{1-2/3} = 15\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).$$

Exercice 4

Comme les termes sont positifs,

$$q^3 = \frac{v_5}{v_2} = \frac{96}{12} = 8,$$

d'où $q = 2$. Ainsi, $v_0 = 12/4 = 3$ et $v_n = 3 \cdot 2^n$. La somme des six premiers termes est

$$3\frac{1-2^6}{1-2} = 189.$$

Exercice 5

Après n versements,

$$u_n = 200 + 50n.$$

Après douze versements, le capital vaut 800 euros. La condition $u_n \geq 1000$ donne $n \geq 16$: il faut donc seize versements.

Exercice 6

On a

$$u_n = 2500(1{,}025)^n.$$

Après huit ans, le capital vaut environ 3 047,25 euros. Pour dépasser 3 000 euros,

$$n > \frac{\ln(3000/2500)}{\ln(1{,}025)}.$$

Le plus petit entier convenable est $n = 8$.

Exercice 7

Le terme général est

$$u_n = 8\left(-\frac{3}{2}\right)^n.$$

Les termes alternent de signe et leur valeur absolue tend vers l'infini. La suite n'est ni monotone ni convergente.

Exercice 8

La somme vaut

$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Puisque $q^{n+1} \to 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \frac{1}{1 - q}.$$

Pour $q = 0{,}9$, cette limite vaut 10.

Exercice 9

La suite est donnée par

$$u_n = 10000(1{,}08)^n.$$

Après six heures,

$$u_6 \approx 15869.$$

Le dépassement de 15 000 se produit au rang

$$n > \frac{\ln(1{,}5)}{\ln(1{,}08)}.$$

Le premier rang est donc $n = 6$. Le modèle suppose un taux de croissance constant et ne tient pas compte des ressources disponibles ni des autres contraintes biologiques.

Exercice 10

Les expressions sont

$$u_n = 100 + 5n, \qquad v_n = 100(1{,}05)^n.$$

Au rang 10, on obtient

$$u_{10} = 150, \qquad v_{10} \approx 162{,}89.$$

La seconde évolution est proportionnelle à la quantité présente, tandis que la première ajoute une quantité fixe.

8 Points de vigilance pour l'oral

Il convient de distinguer soigneusement la raison arithmétique r, qui est une différence, de la raison géométrique q, qui est un facteur multiplicatif.

Il faut également préciser l'indice initial de la suite : une suite définie à partir du rang 0 n'a pas la même écriture explicite qu'une suite définie à partir du rang 1.

Les formules de sommes doivent être accompagnées de leurs conditions d'utilisation, en particulier $q \neq 1$ pour la formule géométrique sous forme de quotient.

Enfin, une suite géométrique de raison négative n'est pas nécessairement monotone ; son comportement dépend du signe et de la valeur absolue de la raison.

Pour l'épreuve orale, il est utile de faire apparaître les liens avec les fonctions affines et exponentielles, les algorithmes de calcul de termes, ainsi que les situations de modélisation.

9 Références bibliographiques

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletins officiels de l'Éducation nationale. Les programmes applicables sont à vérifier selon la session du concours.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme de l'enseignement de spécialité mathématiques en classe de terminale générale*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale.

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES externe de mathématiques : rapports de jury*. Les rapports de la session visée sont consultables sur le site officiel du ministère.

[4] H. Cartan, *Cours de calcul différentiel*. Hermann. Référence complémentaire pour les outils d'analyse ; ce n'est pas un manuel spécifiquement consacré aux suites du lycée.

[5] Éduscol, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques du lycée*. https://eduscol.education.fr/