# Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Suites de terme général $a^n$, $n^p$ et $\ln(n)$

## Table des matières


**1 Introduction** **2**

**2 Prérequis et objectifs** **2**

2.1 Prérequis . . . 2

2.2 Objectifs . . . 2

**3 Étude de la suite géométrique $(a^n)$** **2**

3.1 Définition et variations . . . 2

3.2 Limites . . . 3

3.3 Applications . . . 3

**4 Étude de la suite $(n^p)$** **3**

4.1 Cas d'un exposant entier . . . 3

4.2 Croissance et décroissance . . . 4

4.3 Exemples . . . 4

**5 Étude de la suite $(\ln n)$** **4**

5.1 Limite . . . 4

5.2 Variations . . . 4

5.3 Une inégalité utile . . . 4

**6 Comparaison des vitesses de croissance** **5**

6.1 Le logarithme est dominé par toute puissance positive . . . 5

6.2 Toute puissance positive est dominée par une exponentielle . . . 5

6.3 Conséquence : hiérarchie des croissances . . . 6

**7 Méthodes de calcul de limites** **6**

7.1 Comparaison directe . . . 6

7.2 Factorisation du terme dominant . . . 7

7.3 Cas des quotients avec une exponentielle . . . 7

7.4 Attention aux changements de base . . . . . 7

**8 Exercices proposés** **7**

**9 Conclusion** **9**

**10 Références bibliographiques** **10**

# 1 Introduction

Les suites de termes généraux $a^n$, $n^p$ et $\ln(n)$ constituent des exemples fondamentaux pour étudier les limites, les variations et les ordres de grandeur des suites numériques. Elles interviennent notamment dans les suites géométriques, l'étude des fonctions exponentielle et logarithme, les problèmes de croissance et la comparaison de quantités à l'infini.

L'objectif central de cette leçon est de comprendre le comportement asymptotique de ces suites, puis de comparer leurs vitesses de croissance lorsque leurs termes tendent vers l'infini.

Dans toute la leçon, $n$ désigne un entier naturel non nul et $a$ un réel strictement positif. L'exposant $p$ est un entier, positif, nul ou négatif. Lorsque $p < 0$, la suite $n^p$ est définie par $n^p = 1/n^{-p}$.

# 2 Prérequis et objectifs

## 2.1 Prérequis

Les notions suivantes sont supposées connues :

- définition d'une suite numérique et notion de limite ;
- opérations sur les limites et théorèmes de comparaison ;
- suites arithmétiques et géométriques ;
- propriétés des fonctions puissance, exponentielle et logarithme népérien ;
- étude des variations d'une fonction dérivable ;
- principe de récurrence et inégalités élémentaires.

## 2.2 Objectifs

À l'issue de la leçon, le candidat doit pouvoir :

- déterminer les limites de $(a^n)$, $(n^p)$ et $(\ln n)$ ;
- justifier ces limites par des arguments adaptés ;
- comparer les croissances exponentielle, polynomiale et logarithmique ;
- utiliser ces résultats pour calculer des limites de suites plus complexes ;
- présenter des démonstrations rigoureuses et distinguer les résultats admis de ceux qui sont établis.

# 3 Étude de la suite géométrique $(a^n)$

## 3.1 Définition et variations

Soit $a > 0$. On considère la suite

$$u_n = a^n, \qquad n \geq 1.$$

Son quotient de deux termes consécutifs est

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = a.$$

Il en résulte que :

- si $a > 1$, la suite est strictement croissante ;
- si $a = 1$, la suite est constante égale à 1 ;
- si $0 < a < 1$, la suite est strictement décroissante.

### 3.2 Limites

**Théorème 3.1.** *Pour tout réel $a > 0$,*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 & si\ 0 < a < 1, \\ 1 & si\ a = 1, \\ +\infty & si\ a > 1. \end{cases}}$$

*Démonstration.* Si $a = 1$, le résultat est immédiat.

Supposons $a > 1$. Écrivons $a = 1 + h$, avec $h > 0$. L'inégalité de Bernoulli donne

$$a^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Comme $1 + nh \to +\infty$, on obtient $a^n \to +\infty$.

Enfin, si $0 < a < 1$, posons $b = 1/a > 1$. Alors

$$a^n = \frac{1}{b^n}.$$

Puisque $b^n \to +\infty$, on a $a^n \to 0$. □

### 3.3 Applications

— Une suite géométrique de raison $a > 1$ diverge vers $+\infty$ si son premier terme est strictement positif.
— Une suite géométrique de raison $a$ telle que $0 < a < 1$ converge vers 0.
— Le comportement dépend de la raison et non seulement du caractère géométrique de la suite.

## 4 Étude de la suite $(n^p)$

### 4.1 Cas d'un exposant entier

Soit $p \in \mathbb{Z}$. Pour $n \geq 1$, on définit

$$u_n = n^p.$$

On distingue trois cas.

**Proposition 4.1.** *On a*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n^p = \begin{cases} +\infty & si\ p > 0, \\ 1 & si\ p = 0, \\ 0 & si\ p < 0. \end{cases}}$$

*Démonstration.* Si $p > 0$, alors $n^p \geq n$ pour tout $n \geq 1$, dès que $p \geq 1$. Par comparaison, $n^p \to +\infty$.

Si $p = 0$, alors $n^p = 1$ pour tout $n \geq 1$.

Si $p < 0$, posons $q = -p > 0$. On a

$$n^p = \frac{1}{n^q}.$$

Comme $n^q \to +\infty$, on obtient $n^p \to 0$. □

### 4.2 Croissance et décroissance

Pour $p > 0$, la suite $(n^p)$ est strictement croissante. Pour $p = 0$, elle est constante. Pour $p < 0$, elle est strictement décroissante.

On peut également étudier les variations à l'aide de

$$\frac{(n+1)^p}{n^p} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^p,$$

avec une interprétation adaptée lorsque $p < 0$.

### 4.3 Exemples

$$\lim_{n\to+\infty} n^3 = +\infty, \qquad \lim_{n\to+\infty} n^0 = 1, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^4} = 0.$$

Il est important de distinguer la croissance d'une suite de sa vitesse de croissance : deux suites peuvent tendre vers $+\infty$ tout en ayant des comportements asymptotiques très différents.

## 5 Étude de la suite $(\ln n)$

### 5.1 Limite

**Théorème 5.1.**

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \ln n = +\infty.}$$

*Démonstration.* La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ et vérifie

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

Puisque la suite des entiers $n$ tend vers $+\infty$, la composition donne

$$\ln n \longrightarrow +\infty.$$

□

### 5.2 Variations

La fonction $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. Par conséquent, la suite $(\ln n)$ est strictement croissante.

La croissance de $\ln n$ est néanmoins lente : elle est dominée par celle de toute puissance $n^p$ avec $p > 0$.

### 5.3 Une inégalité utile

Pour tout $x > 0$, on dispose notamment de

$$\ln x \leq x - 1.$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\ln n \leq n - 1.$$

Cette inégalité permet d'établir une première comparaison entre logarithme et croissance polynomiale.

# 6 Comparaison des vitesses de croissance

Cette section constitue un point central de la leçon. Les trois familles étudiées permettent de distinguer la croissance logarithmique, la croissance polynomiale et la croissance exponentielle.

## 6.1 Le logarithme est dominé par toute puissance positive

**Théorème 6.1.** *Pour tout réel $\alpha > 0$,*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\alpha} = 0.}$$

*Démonstration.* On peut étudier la fonction

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^\alpha}, \qquad x \geq 1.$$

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1 - \alpha \ln x}{x^{\alpha+1}}.$$

Pour $x > \exp(1/\alpha)$, cette dérivée est négative. La fonction est donc décroissante à partir d'un certain rang et positive.

Pour établir sa limite, on peut utiliser la règle de l'Hôpital sur le quotient de fonctions :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$$

Le résultat pour les entiers s'en déduit. □

*Remarque* 6.2. La règle de l'Hôpital n'est utilisable que si elle a été établie dans le cadre théorique retenu. Pour une présentation au niveau du lycée, on peut remplacer cette démonstration par une inégalité convenablement choisie.

## 6.2 Toute puissance positive est dominée par une exponentielle

**Théorème 6.3.** *Pour tout réel $a > 1$ et tout entier $p \geq 0$,*

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = 0.}$$

*Démonstration.* Pour $p = 0$, le résultat est immédiat puisque $a^n \to +\infty$.

Supposons $p \geq 1$ et posons

$$u_n = \frac{n^p}{a^n}.$$

Alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^p.$$

Or

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow 1,$$

donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{a} < 1.$$

Il existe donc un réel $r$ tel que $1/a < r < 1$ et un rang $N$ tels que, pour tout $n \geq N$,

$$0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq r.$$

Par récurrence,

$$0 \leq u_n \leq u_N r^{n-N} \qquad (n \geq N).$$

Comme $r^n \to 0$, le théorème des gendarmes donne $u_n \to 0$. □

### 6.3 Conséquence : hiérarchie des croissances

Pour tout réel $a > 1$ et tout entier $p \geq 1$,

$$\ln n = o(n^p) \qquad \text{et} \qquad n^p = o(a^n),$$

où $u_n = o(v_n)$ signifie que

$$\frac{u_n}{v_n} \longrightarrow 0,$$

lorsque le quotient est défini à partir d'un certain rang.

On résume cette hiérarchie par

$$\boxed{\ln n \ll n^p \ll a^n}$$

pour $p \geq 1$ et $a > 1$, au sens des limites de quotients.

Cela signifie que le logarithme croît moins vite que toute puissance strictement positive, tandis qu'une exponentielle de base strictement supérieure à 1 croît plus vite que toute puissance polynomiale.

## 7 Méthodes de calcul de limites

### 7.1 Comparaison directe

Pour étudier

$$u_n = \frac{\ln n}{n^2},$$

on utilise le résultat précédent :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

De même, pour $a > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^4}{a^n} = 0.$$

### 7.2 Factorisation du terme dominant

Considérons

$$u_n = \frac{3n^2 + 5\ln n + 1}{n^2}.$$

On écrit

$$u_n = 3 + 5\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}.$$

Les deux derniers termes tendent vers 0, donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 3.$$

### 7.3 Cas des quotients avec une exponentielle

Pour $a > 1$,

$$u_n = \frac{n^3 + 2n}{a^n}.$$

On décompose :

$$u_n = \frac{n^3}{a^n} + 2\frac{n}{a^n}.$$

Chaque terme tend vers 0, d'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

### 7.4 Attention aux changements de base

Si $0 < a < 1$, alors $a^n \to 0$. Par conséquent, il ne faut pas appliquer le résultat précédent comme si la base était supérieure à 1. Par exemple,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{a^n} = +\infty \qquad (p \geq 0,\ 0 < a < 1).$$

Pour $p = 0$, cela résulte directement de $1/a^n \to +\infty$ ; pour $p > 0$, le quotient est encore plus grand que $1/a^n$ à partir du rang 1.

## 8 Exercices proposés

Les exercices suivants permettent de vérifier les résultats fondamentaux puis de les mobiliser dans des calculs de limites.

### Exercice 1 – Limites élémentaires

Déterminer les limites suivantes :

$$u_n = 3^n, \qquad v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n, \qquad w_n = 1^n,$$
$$x_n = n^5, \qquad y_n = \frac{1}{n^3}, \qquad z_n = \ln n.$$

**Indication de correction.** Les limites sont respectivement

$$+\infty, \quad 0, \quad 1, \quad +\infty, \quad 0, \quad +\infty.$$

### Exercice 2 – Comparaison logarithme-puissance

Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n}.$$

**Indication de correction.** Les trois limites sont nulles. Pour la troisième, on peut poser $t = \ln n$ et étudier $t^2/e^t$, ou utiliser la croissance comparée.

### Exercice 3 – Comparaison avec une exponentielle

Pour $a > 1$, déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 3n + 1}{a^n}.$$

**Indication de correction.** Décomposer en trois termes et utiliser le théorème de comparaison des croissances. La limite est 0.

### Exercice 4 – Une suite avec plusieurs termes

Étudier la limite de

$$u_n = \frac{4n^3 + 2n + \ln n}{2n^3 - 5}.$$

**Indication de correction.** Diviser le numérateur et le dénominateur par $n^3$. La limite est 2.

### Exercice 5 – Une expression exponentielle

Pour $a > 1$, calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n^4}.$$

**Indication de correction.** Le quotient réciproque tend vers 0 et les deux termes sont strictement positifs. La limite cherchée est donc $+\infty$.

### Exercice 6 – Somme de termes

Déterminer la limite de

$$u_n = n^2 + \ln n - \frac{1}{n}.$$

**Indication de correction.** Le terme $n^2$ tend vers $+\infty$ et les deux autres termes ne peuvent compenser cette divergence. La limite est $+\infty$.

### Exercice 7 – Cas d'une base inférieure à 1

Soit $0 < a < 1$. Étudier

$$u_n = \frac{n^3}{a^n}.$$

**Indication de correction.** On a $a^n \to 0$ et $n^3 \to +\infty$. Comme $1/a^n \to +\infty$, le produit $n^3(1/a^n)$ tend vers $+\infty$.

### Exercice 8 – Recherche d'un équivalent

Déterminer un équivalent simple de

$$u_n = \frac{2n^3 + 7n^2 + \ln n}{5n^3 - 2n}.$$

**Indication de correction.** Le numérateur est équivalent à $2n^3$ et le dénominateur à $5n^3$. Ainsi,

$$u_n \longrightarrow \frac{2}{5}.$$

### Exercice 9 – Raisonnement par quotient

Soit $a > 1$ et

$$u_n = \frac{n^p}{a^n}, \qquad p \in \mathbb{N}^*.$$

Étudier la limite de $u_n$ en utilisant le quotient $u_{n+1}/u_n$.

**Indication de correction.** On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \longrightarrow \frac{1}{a} < 1.$$

Le quotient est donc majoré par un réel strictement inférieur à 1 à partir d'un certain rang. La suite tend vers 0.

### Exercice 10 – Synthèse

Soit $a > 1$. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2 \ln n + 3n}{a^n}.$$

**Indication de correction.** On utilise

$$\frac{n^2 \ln n}{a^n} = \frac{\ln n}{n} \frac{n^3}{a^n}.$$

Les deux facteurs tendent vers 0, donc leur produit tend vers 0. Le terme $3n/a^n$ tend également vers 0. La limite totale est nulle.

## 9 Conclusion

Les trois familles de suites étudiées illustrent des comportements asymptotiques distincts :

- les suites géométriques $(a^n)$ dépendent de la position de $a$ par rapport à 1 ;
- les suites $(n^p)$ tendent vers $+\infty$, 1 ou 0 selon le signe de $p$ ;
- la suite $(\ln n)$ tend vers $+\infty$, mais beaucoup plus lentement que toute puissance strictement positive de $n$.

Le résultat de synthèse est la hiérarchie

$$\boxed{\ln n \ll n^p \ll a^n}$$

pour tout entier $p \geq 1$ et tout réel $a > 1$.

Cette hiérarchie fournit une méthode efficace pour calculer de nombreuses limites de suites, en identifiant le terme dominant et en utilisant les théorèmes de comparaison.

## 10 Références bibliographiques

## Références


[1] J.-M. Monier, *Analyse MP*, Dunod. Ouvrage de référence pour les limites, les suites et les comparaisons asymptotiques.

[2] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses. Pour approfondir les techniques de calcul de limites et les démonstrations relatives aux suites.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques tout-en-un pour la Licence*, Dunod. Référence complémentaire pour les fonctions usuelles et les limites.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Documents officiels disponibles sur https://www.education.gouv.fr/.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme du concours du CAPES de mathématiques et rapports de jury*. Documents à consulter sur le site officiel https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.