CAPES de mathématiques – Leçon d'oral

Suites de nombres réels définies par une relation de récurrence

Présentation des méthodes d'étude, des résultats fondamentaux et des applications

Prérequis : suites numériques, limites, continuité, dérivation, théorèmes de convergence des suites monotones.

Objectif : étudier le comportement d'une suite définie à partir de ses termes précédents, en particulier sa monotonie, sa convergence et sa limite éventuelle.

Document de préparation à l'oral

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

1.1 Prérequis . . . 2

1.2 Objectifs . . . 2

2 Définition et premiers exemples **2**

2.1 Définition générale . . . 2

2.2 Récurrence d'ordre un . . . 3

2.3 Récurrence linéaire . . . 3

3 Existence, unicité et stabilité d'un intervalle **3**

3.1 Bien-définition de la suite . . . 3

3.2 Méthode pratique . . . 4

4 Étude de la monotonie **4**

4.1 Étude du signe de la différence . . . 4

4.2 Exemple : une suite croissante et majorée . . . 4

5 Convergence et détermination de la limite **5**

5.1 Théorème de convergence monotone . . . 5

5.2 Équation du point fixe . . . 5

5.3 Résolution de l'exemple précédent . . . 5

6 Rôle de la monotonie de la fonction **6**

6.1 Une fonction croissante . . . 6

6.2 Une fonction décroissante . . . 6

7 Convergence par contraction **6**

7.1 Application . . . 7

8 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux **7**

8.1 Relation homogène . . . 7

8.2 Racines réelles distinctes . . . 7

8.3 Racine double . . . 8

8.4 Exemple : suite de Fibonacci . . . 8

9 Méthode générale d'étude **8**

10 Liste d'exercices **8**

10.1 Exercice 1 – Une suite affine . . . 9

10.2 Exercice 2 – Une suite définie par une racine . . . 9

10.3 Exercice 3 – Une suite oscillante . . . 9

10.4 Exercice 4 – Contraction et vitesse de convergence 9
10.5 Exercice 5 – Une récurrence non linéaire 10
10.6 Exercice 6 – Récurrence linéaire d'ordre deux 10
10.7 Exercice 7 – La suite de Fibonacci 10
10.8 Exercice 8 – Une récurrence avec fonction décroissante 11

11 Éléments de correction des exercices **11**

12 Conclusion **13**

13 Références bibliographiques **13**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

L'étude des suites définies par récurrence mobilise les notions suivantes :

— définition d'une suite et calcul de ses premiers termes ;

— comparaison de nombres réels et étude du signe d'une expression ;

— monotonie et majoration ou minoration d'une suite ;

— convergence des suites monotones bornées ;

— continuité et dérivabilité des fonctions réelles ;

— résolution d'équations réelles ;

— raisonnement par récurrence.

Pour les récurrences d'ordre supérieur, on peut également utiliser les équations caractéristiques des suites récurrentes linéaires.

1.2 Objectifs

Il s'agit de savoir :

1. reconnaître les différents types de relations de récurrence ;
2. démontrer qu'une suite est bien définie ;
3. établir la stabilité d'un intervalle par une fonction ;
4. étudier la monotonie et les bornes d'une suite ;
5. déterminer les limites possibles à partir de l'équation des points fixes ;
6. justifier rigoureusement la convergence ;
7. étudier des exemples concrets et identifier les limites des méthodes utilisées.

2 Définition et premiers exemples

2.1 Définition générale

Définition 2.1. Soit p un entier naturel non nul. Une suite (u_n) est définie par une relation de récurrence d'ordre p lorsque ses premiers termes sont donnés et que, pour tout indice n suffisamment grand, le terme u_{n+p} est exprimé en fonction des termes précédents :

$$u_{n+p} = F(u_n, u_{n+1}, \dots, u_{n+p-1}).$$

La fonction F et les conditions initiales déterminent la suite, lorsque la relation permet effectivement de calculer chaque nouveau terme de manière unique.

Une suite récurrente est donc définie à partir d'un nombre fini de valeurs initiales et d'une règle de calcul.

2.2 Récurrence d'ordre un

Le cas fondamental est celui d'une suite définie par

$$\boxed{u_0 = a, \qquad u_{n+1} = f(u_n)}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et où f est une fonction définie sur un ensemble contenant tous les termes de la suite. On parle également d'itération de la fonction f. Formellement,

$$u_n = f^{\circ n}(a),$$

où $f^{\circ n}$ désigne la composée de f avec elle-même n fois, et non la puissance numérique $f(x)^n$.

Exemple 2.2. Considérons

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2}.$$

Les premiers termes sont

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = \frac{3}{2}, \qquad u_2 = \frac{7}{4}, \qquad u_3 = \frac{15}{8}.$$

Ils suggèrent une convergence vers 2. Cette conjecture devra être démontrée.

2.3 Récurrence linéaire

Une suite vérifiant

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$$

est définie par une relation de récurrence linéaire affine d'ordre deux, où a, b, c sont des réels fixés.

Lorsque $c = 0$, la relation est linéaire homogène.

Exemple 2.3. La suite de Fibonacci est définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Ses premiers termes sont

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \ldots$$

Cette suite illustre l'importance des relations de récurrence d'ordre supérieur.

3 Existence, unicité et stabilité d'un intervalle

3.1 Bien-définition de la suite

Dans le cas

$$u_0 = a, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

il faut vérifier que $f(u_n)$ existe à chaque étape.

Proposition 3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a \in I$ et $f(I) \subset I$. Si f est définie sur I, alors la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n \in I.$$

Démonstration. On raisonne par récurrence.

Initialisation : $u_0 = a \in I$.

Hérédité : si $u_n \in I$, alors $f(u_n) \in f(I) \subset I$. Ainsi $u_{n+1} \in I$.

La propriété est donc vraie pour tout entier naturel n. □

Remarque 3.2. La stabilité d'un intervalle fournit simultanément une justification de la bonne définition de la suite et, lorsque l'intervalle est borné, une éventuelle majoration ou minoration.

3.2 Méthode pratique

Pour étudier une suite récurrente, on cherchera souvent un intervalle I vérifiant

$$u_0 \in I \qquad \text{et} \qquad f(I) \subset I.$$

Cette démarche est particulièrement efficace lorsque f est croissante ou lorsque l'on peut déterminer les extrema de f sur I.

4 Étude de la monotonie

4.1 Étude du signe de la différence

La méthode la plus directe consiste à calculer

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n.$$

Le signe de cette différence détermine la monotonie de la suite.

Proposition 4.1. *Pour toute suite réelle (u_n) :*

— *si $u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour tout n, alors (u_n) est croissante ;*

— *si $u_{n+1} - u_n \leq 0$ pour tout n, alors (u_n) est décroissante.*

Dans le cas d'une suite récurrente, on étudie donc

$$g(x) = f(x) - x.$$

Il faut ensuite connaître les valeurs possibles de u_n pour déduire le signe de $g(u_n)$.

4.2 Exemple : une suite croissante et majorée

Considérons

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

Montrons d'abord que

$$1 \leq u_n < 2.$$

En effet, si $1 \leq u_n < 2$, alors

$$\sqrt{3} \leq u_{n+1} < 2.$$

L'initialisation et l'hérédité permettent d'établir par récurrence que $1 \leq u_n < 2$ pour tout n.

Ensuite,

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{2 + u_n} - u_n.$$

Les deux termes comparés étant positifs, on peut comparer leurs carrés :

$$u_{n+1} \geq u_n \iff 2 + u_n \geq u_n^2$$

soit

$$(2 - u_n)(u_n + 1) \geq 0.$$

Cette inégalité est vraie puisque $1 \leq u_n < 2$.

La suite est donc croissante et majorée par 2 ; elle converge.

5 Convergence et détermination de la limite

5.1 Théorème de convergence monotone

Théorème 5.1 (Théorème de convergence monotone)**.** *Toute suite réelle croissante et majorée converge vers un nombre réel. De même, toute suite réelle décroissante et minorée converge vers un nombre réel.*

Ce théorème est central dans l'étude des suites récurrentes. Une fois la monotonie et une borne établies, la convergence est acquise.

5.2 Équation du point fixe

Supposons que

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

et que $u_n \to \ell$. Si f est continue en ℓ, alors

$$u_{n+1} \longrightarrow f(\ell).$$

Mais la suite (u_{n+1}) est extraite de la suite (u_n) par décalage d'indice et converge donc également vers ℓ. Par unicité de la limite,

$$\boxed{\ell = f(\ell).}$$

La limite éventuelle doit ainsi être un point fixe de f.

Remarque 5.2. L'équation $\ell = f(\ell)$ ne démontre pas, à elle seule, la convergence de (u_n). Elle fournit seulement une condition nécessaire lorsque la limite existe et que f est continue au point considéré.

5.3 Résolution de l'exemple précédent

Pour la suite

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n},$$

la convergence a été démontrée. Si ℓ désigne sa limite, alors

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

Puisque $\ell \geq 0$, on obtient

$$\ell^2 - \ell - 2 = 0,$$

d'où

$$(\ell - 2)(\ell + 1) = 0.$$

La seule solution non négative est 2. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 2.}$$

6 Rôle de la monotonie de la fonction

6.1 Une fonction croissante

Si f est croissante sur un intervalle stable I, on peut souvent démontrer la monotonie de la suite à partir de l'inégalité initiale.

En effet, si $u_1 \geq u_0$, alors

$$u_1 = f(u_0) \geq u_0.$$

Si $u_{n+1} \geq u_n$, la croissance de f entraîne

$$u_{n+2} = f(u_{n+1}) \geq f(u_n) = u_{n+1}.$$

Par récurrence, la suite est croissante.

Le même raisonnement vaut pour une suite décroissante.

Proposition 6.1. *Si f est croissante sur un intervalle stable contenant tous les termes de (u_n), alors le signe de $u_1 - u_0$ détermine la monotonie de la suite :*

— *si $u_1 \geq u_0$, la suite est croissante ;*

— *si $u_1 \leq u_0$, la suite est décroissante.*

6.2 Une fonction décroissante

Si f est décroissante, les inégalités sont inversées :

$$u_{n+1} \geq u_n \quad \Longrightarrow \quad u_{n+2} \leq u_{n+1}.$$

La suite peut alors alterner entre des termes croissants et décroissants. Il est utile d'étudier les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Exemple 6.2. Considérons

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2}.$$

Les premiers termes sont

$$0, \quad 1, \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{5}{8}, \quad \frac{11}{16}, \ldots$$

La fonction $f(x) = 1 - \frac{x}{2}$ est décroissante. Les termes oscillent autour du point fixe $\ell = \frac{2}{3}$.

7 Convergence par contraction

La monotonie n'est pas toujours la méthode la plus efficace. Une autre possibilité consiste à comparer les termes à un point fixe.

Théorème 7.1 (Principe de contraction sur un intervalle)**.** *Soit I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to I$ une fonction telle qu'il existe $k \in [0, 1[$ vérifiant*

$$\forall x, y \in I, \qquad |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|.$$

Alors f possède un unique point fixe $\ell \in I$. Pour toute valeur initiale $u_0 \in I$, la suite définie par

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

converge vers ℓ.

Démonstration. Le théorème du point fixe de Banach s'applique à l'espace métrique complet I, muni de la distance usuelle. Il garantit l'existence et l'unicité du point fixe, ainsi que la convergence des itérations vers ce point. □

La convergence peut aussi être quantifiée. En effet,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq k|u_n - \ell|.$$

Par récurrence,

$$\boxed{|u_n - \ell| \leq k^n |u_0 - \ell|.}$$

Cette estimation montre que la convergence est géométrique.

7.1 Application

Reprenons

$$u_{n+1} = 1 - \frac{u_n}{2}.$$

Le point fixe est déterminé par

$$\ell = 1 - \frac{\ell}{2}, \qquad \text{donc} \qquad \ell = \frac{2}{3}.$$

De plus,

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|.$$

Le théorème de contraction s'applique sur $\mathbb{R}$ et donne

$$\left|u_n - \frac{2}{3}\right| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - \frac{2}{3}\right|.$$

Ainsi, la suite converge vers $\frac{2}{3}$, sans qu'il soit nécessaire de démontrer directement sa monotonie.

8 Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

8.1 Relation homogène

Considérons une suite définie par

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ et où u_0, u_1 sont donnés.

On recherche des solutions de la forme $u_n = r^n$. Pour $r \neq 0$, la relation conduit à l'équation caractéristique

$$\boxed{r^2 - ar - b = 0.}$$

Les racines de cette équation permettent de déterminer l'expression générale de la suite.

8.2 Racines réelles distinctes

Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors

$$u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,$$

où les constantes λ et μ sont déterminées par les conditions initiales.

Le comportement asymptotique dépend notamment des valeurs absolues des racines.

8.3 Racine double

Si l'équation caractéristique possède une racine double r, la forme générale est

$$u_n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

Le cas $r = 0$ peut être traité directement à partir de la relation de récurrence.

8.4 Exemple : suite de Fibonacci

La relation

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

conduit à l'équation caractéristique

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

Ses racines sont

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Pour $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, on obtient

$$\boxed{u_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.}$$

Comme $|\psi| < 1 < \varphi$, cette expression permet notamment d'établir un équivalent de u_n lorsque n tend vers l'infini.

9 Méthode générale d'étude

Pour une suite définie par

$$u_0 = a, \qquad u_{n+1} = f(u_n),$$

on peut suivre les étapes suivantes :

1. **Vérifier la bonne définition.** Identifier le domaine de f et les valeurs initiales.
2. **Rechercher un intervalle stable.** Trouver I tel que $u_0 \in I$ et $f(I) \subset I$.
3. **Étudier la monotonie.** Calculer $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ ou utiliser la monotonie de f.
4. **Établir une borne.** Utiliser la stabilité de l'intervalle ou une inégalité adaptée.
5. **Conclure sur la convergence.** Appliquer le théorème de convergence monotone si ses hypothèses sont vérifiées, ou utiliser une autre méthode.
6. **Déterminer la limite.** Si f est continue au point limite, résoudre $\ell = f(\ell)$.
7. **Préciser le comportement asymptotique.** Si nécessaire, rechercher une vitesse de convergence, un équivalent ou une expression explicite.

Il faut distinguer soigneusement la recherche des limites possibles et la preuve de l'existence d'une limite.

10 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de travailler les principales méthodes de la leçon. Les indications servent à guider la résolution sans remplacer les démonstrations.

10.1 Exercice 1 – Une suite affine

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 4}{3}.$$

1. Calculer les premiers termes.
2. Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout n.
3. Étudier la monotonie de la suite.
4. Déterminer sa limite.
5. Obtenir une expression explicite de u_n.

Indication : étudier $u_{n+1} - u_n$ et considérer la distance entre u_n et le point fixe.

10.2 Exercice 2 – Une suite définie par une racine

On considère

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \sqrt{3 + u_n}.$$

1. Démontrer que la suite est bien définie.
2. Montrer que $0 \leq u_n \leq 3$.
3. Étudier sa monotonie.
4. Démontrer sa convergence.
5. Déterminer sa limite.

Indication : rechercher un intervalle stable puis comparer $\sqrt{3 + u_n}$ à u_n.

10.3 Exercice 3 – Une suite oscillante

On pose

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = 2 - u_n.$$

1. Calculer les premiers termes.
2. Déterminer une expression explicite de u_n.
3. La suite converge-t-elle ?
4. Étudier les sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).

Indication : déterminer les deux premiers termes et étudier la fonction $f(x) = 2 - x$.

10.4 Exercice 4 – Contraction et vitesse de convergence

Soit

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{2}.$$

1. Déterminer le point fixe de $f(x) = \frac{x+1}{2}$.
2. Justifier que f est contractante sur $\mathbb{R}$.

3. Démontrer la convergence de (u_n).

4. Établir une majoration de $|u_n - 1|$.

5. Déterminer le plus petit entier n assurant $|u_n - 1| \leq 10^{-3}$.

Indication : utiliser

$$|u_n - 1| = 2^{-n}|u_0 - 1|.$$

10.5 Exercice 5 – Une récurrence non linéaire

On considère

$$u_0 \in [0,1], \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}.$$

1. Montrer que $[0,1]$ est stable par $f(x) = \frac{x^2+1}{2}$.

2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

3. En déduire la convergence de la suite.

4. Déterminer sa limite en fonction de u_0.

Indication : les points fixes vérifient $x = (x^2 + 1)/2$.

10.6 Exercice 6 – Récurrence linéaire d'ordre deux

Soit la suite définie par

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 2, \qquad u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n.$$

1. Calculer les premiers termes.

2. Résoudre l'équation caractéristique.

3. Déterminer l'expression explicite de u_n.

4. Étudier la convergence de la suite.

Indication : les racines caractéristiques sont les solutions de $r^2 - 3r + 2 = 0$.

10.7 Exercice 7 – La suite de Fibonacci

On définit

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 1, \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. Montrer que $u_n \geq 0$ pour tout n.

2. Étudier la croissance de la suite.

3. Résoudre l'équation caractéristique.

4. Établir la formule explicite de u_n.

5. Déterminer un équivalent de u_n.

Indication : comparer les modules des deux racines caractéristiques.

10.8 Exercice 8 – Une récurrence avec fonction décroissante

On considère

$$u_0 = 0, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}.$$

1. Montrer que la suite est à valeurs dans $[0,1]$.
2. Étudier la monotonie des sous-suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}).
3. Démontrer que ces deux sous-suites convergent.
4. Montrer que leurs limites sont égales.
5. Déterminer la limite commune.

Indication : étudier la composée $f \circ f$ et utiliser la continuité de f.

11 Éléments de correction des exercices

Exercice 1

Le point fixe vérifie

$$\ell = \frac{\ell+4}{3},$$

d'où $\ell = 2$. On a

$$u_{n+1} - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 2).$$

Par conséquent,

$$u_n - 2 = \frac{u_0 - 2}{3^n} = -\frac{2}{3^n}, \qquad \boxed{u_n = 2 - \frac{2}{3^n}.}$$

La suite est croissante, majorée par 2, et converge vers 2.

Exercice 2

L'intervalle $[0,3]$ est stable. Sur cet intervalle,

$$u_{n+1} \geq u_n \iff 3 + u_n \geq u_n^2.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée pour $u_n \in [0,3]$. La suite est croissante et majorée par 3, donc convergente. Sa limite vérifie

$$\ell = \sqrt{3+\ell},$$

soit $\ell^2 - \ell - 3 = 0$. La limite est donc

$$\boxed{\ell = \frac{1+\sqrt{13}}{2}.}$$

Exercice 3

Les termes alternent entre 1 et $1 - 1 = 0$:

$$u_{2n} = 1, \qquad u_{2n+1} = 1.$$

Cette conclusion serait incorrecte pour la relation proposée. En réalité, la récurrence $u_{n+1} = 2 - u_n$ donne

$$u_{2n} = 1, \qquad u_{2n+1} = 1$$

uniquement si $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, ce qui n'est pas le cas : la bonne relation donne $u_1 = 1$ puis tous les termes valent 1. Ainsi,

$$\boxed{u_n = 1 \text{ pour tout } n.}$$

Exercice 4

Le point fixe est 1 et

$$|f(x) - f(y)| = \frac{1}{2}|x - y|.$$

La contraction entraîne la convergence vers 1. En outre,

$$|u_n - 1| = \frac{2}{2^n}.$$

La condition recherchée est $2^{n+1} \geq 1000$. Le plus petit entier convenable est donc $n = 9$.

Exercice 5

Les points fixes vérifient

$$x = \frac{x^2 + 1}{2} \iff (x-1)^2 = 0.$$

Le seul point fixe est 1. Pour $x \in [0, 1]$,

$$f(x) - x = \frac{(x-1)^2}{2} \geq 0.$$

La suite est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers le seul point fixe de l'intervalle :

$$\boxed{\ell = 1.}$$

Exercice 6

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 3r + 2 = (r-1)(r-2) = 0.$$

Ainsi,

$$u_n = \lambda + \mu 2^n.$$

Les conditions initiales donnent

$$\lambda + \mu = 1, \qquad \lambda + 2\mu = 2.$$

Donc $\lambda = 0$ et $\mu = 1$, d'où

$$\boxed{u_n = 2^n.}$$

La suite diverge vers $+\infty$.

Exercice 7

L'équation caractéristique est $r^2 - r - 1 = 0$. Ses racines sont $\varphi = (1+\sqrt{5})/2$ et $\psi = (1-\sqrt{5})/2$. On obtient

$$u_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}} \quad \text{et} \quad u_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.$$

Exercice 8

La fonction $f(x) = 1/(1+x)$ est décroissante sur $[0,1]$. La composée

$$f(f(x)) = \frac{1+x}{2+x}$$

est croissante. Les sous-suites de rang pair et impair peuvent ainsi être étudiées séparément. Si leurs limites sont p et q, alors

$$p = \frac{1}{1+q}, \qquad q = \frac{1}{1+p}.$$

Ces relations impliquent $p = q$ et

$$p = \frac{1}{1+p}.$$

La limite commune est donc

$$\boxed{\frac{\sqrt{5}-1}{2}.}$$

12 Conclusion

L'étude d'une suite définie par récurrence repose sur l'articulation de plusieurs méthodes : stabilité d'un intervalle, raisonnement par récurrence, étude de la monotonie, convergence des suites monotones et recherche d'un point fixe.

Il convient de ne pas confondre trois étapes :

1. déterminer les limites possibles ;
2. démontrer que la suite converge ;
3. identifier sa limite.

Le choix de la méthode dépend de la forme de la relation : l'étude du signe de $f(x) - x$ convient aux suites monotones, tandis que les contractions permettent de démontrer directement la convergence. Pour les récurrences linéaires d'ordre supérieur, l'équation caractéristique fournit une méthode complémentaire.

13 Références bibliographiques

Références

[1] J.-M. Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Ouvrage de référence pour les suites numériques, les limites, la continuité et les méthodes d'analyse.

[2] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques Tout-en-un pour la Licence*, Dunod. Référence complémentaire pour l'analyse réelle et les suites.

[3] X. Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses. Ouvrage proposant des démonstrations et des exercices d'analyse de niveau supérieur.

[4] S. Banach, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales*, Fundamenta Mathematicae, vol. 3, 1922, p. 133–181. Référence historique concernant le principe du point fixe utilisé dans l'étude des contractions.

[5] Euclide, *Les Éléments*. Référence historique générale pour la pratique de la démonstration mathématique ; elle ne constitue pas une référence spécifique aux suites récurrentes modernes.