Problèmes conduisant à l'étude de suites

Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
2.1 Prérequis . . . 2
2.2 Objectifs . . . 2

3 Démarche générale de modélisation **2**

4 Premier exemple : évolution d'un capital **3**
4.1 Énoncé . . . 3
4.2 Mise en équation . . . 3
4.3 Étude et interprétation . . . 3
4.4 Prolongements . . . 4

5 Deuxième exemple : population et capacité d'accueil **4**
5.1 Énoncé . . . 4
5.2 Recherche des points fixes . . . 4
5.3 Étude de la monotonie . . . 4
5.4 Détermination de la limite . . . 5
5.5 Intérêt et limites du modèle . . . 5

6 Troisième exemple : approximation d'un nombre **5**
6.1 Énoncé . . . 5
6.2 Recherche d'un encadrement . . . 5
6.3 Étude de la monotonie . . . 5
6.4 Calcul de la limite . . . 6
6.5 Interprétation numérique . . . 6

7 Quatrième exemple : remplissage d'un réservoir **6**
7.1 Énoncé . . . 6
7.2 Relation de récurrence . . . 6
7.3 Recherche d'un équilibre . . . 6
7.4 Convergence et interprétation . . . 7

8 Cinquième exemple : construction géométrique **7**
8.1 Énoncé . . . 7
8.2 Modélisation . . . 7
8.3 Limite . . . 7

9 Outils mathématiques mobilisés **7**
9.1 Suites explicites 7
9.2 Suites définies par récurrence 8
9.3 Suites arithmétiques et géométriques 8
9.4 Points fixes 8
9.5 Monotonie et bornitude 8

10 Apports des outils numériques **8**

11 Exercices proposés **9**

12 Éléments de correction et pistes **11**

13 Conclusion **11**

14 Références bibliographiques **11**

1 Introduction

De nombreux problèmes mathématiques font intervenir des quantités qui évoluent par étapes : capital financier, population, température mesurée à intervalles réguliers, nombre de bactéries, aire d'une figure construite par itérations ou approximation successive d'une solution.

Dans ces situations, les suites numériques constituent un outil privilégié de modélisation. Une suite permet d'associer à chaque étape un nombre réel et d'étudier son évolution au cours du temps ou du processus considéré.

L'enjeu est de passer d'une situation concrète à un modèle mathématique, de choisir une représentation adaptée de la suite, puis d'exploiter ses propriétés pour répondre à la question posée.

Cette leçon met l'accent sur la démarche de modélisation : identification des variables, établissement d'une relation de récurrence ou d'une formule explicite, étude des variations et recherche éventuelle d'une limite.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les prérequis nécessaires sont :

— le calcul numérique et algébrique ;

— les pourcentages et les évolutions successives ;

— la notion de fonction et l'étude de ses variations ;

— les suites arithmétiques et géométriques ;

— les définitions de la monotonie, du majorant et du minorant d'une suite ;

— les premiers résultats sur la convergence des suites, notamment le théorème de convergence des suites monotones bornées.

Selon les exemples retenus, on pourra également mobiliser les fonctions exponentielles et logarithmes, les équations du second degré, les fonctions dérivables et les outils de calcul numérique.

2.2 Objectifs

À l'issue de cette leçon, on souhaite être capable de :

— traduire une situation concrète en un modèle faisant intervenir une suite ;

— distinguer une définition explicite d'une définition par récurrence ;

— calculer des termes et interpréter leur signification ;

— étudier les variations et la bornitude d'une suite ;

— déterminer, lorsque cela est possible, sa limite ;

— interpréter les résultats dans le contexte initial ;

— discuter les hypothèses, les limites et la pertinence du modèle choisi.

3 Démarche générale de modélisation

L'étude d'un problème conduisant à une suite peut être organisée en plusieurs étapes.

1. **Identifier les grandeurs.** Préciser ce qui varie, ce qui est connu et ce que l'on cherche.
2. **Choisir l'indice.** Définir ce que représente l'entier n : nombre de périodes, rang d'une étape ou nombre d'itérations.

3. **Définir la suite.** Poser u_n égal à la quantité étudiée à l'étape n.
4. **Établir le modèle.** Obtenir une formule explicite ou une relation de récurrence.
5. **Étudier la suite.** Calculer des termes, rechercher la monotonie, la bornitude et, si nécessaire, la limite.
6. **Répondre au problème.** Traduire les conclusions mathématiques dans le contexte de départ et vérifier leur cohérence.

Il convient de distinguer la résolution mathématique du problème et la validation du modèle. Une suite peut être étudiée rigoureusement tout en reposant sur des hypothèses physiques ou économiques simplificatrices.

4 Premier exemple : évolution d'un capital

4.1 Énoncé

Une personne dépose un capital initial de 1 000 euros sur un compte rémunéré à un taux annuel de 3 %. On suppose que les intérêts sont capitalisés chaque année et que le taux reste constant.

On note u_n le capital, en euros, après n années.

4.2 Mise en équation

Le capital initial est

$$u_0 = 1000.$$

Après une année, le capital est multiplié par 1,03. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 1{,}03u_n.$$

La suite (u_n) est géométrique de raison 1,03 et de premier terme $u_0 = 1000$. On en déduit

$$\boxed{u_n = 1000(1{,}03)^n.}$$

4.3 Étude et interprétation

Comme $1{,}03 > 1$, la suite est strictement croissante. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty} (1{,}03)^n = +\infty,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Dans ce modèle, le capital augmente sans borne.

On peut également déterminer le premier rang à partir duquel le capital dépasse un seuil $S > 1000$. Il faut résoudre

$$1000(1{,}03)^n \geq S,$$

soit, en utilisant le logarithme,

$$n \geq \frac{\ln(S/1000)}{\ln(1{,}03)}.$$

Le plus petit entier satisfaisant cette inégalité donne le nombre minimal d'années nécessaires.

4.4 Prolongements

On peut comparer cette situation à celle d'un capital soumis à des retraits fixes, à un taux variable ou à des versements réguliers. Ces variantes conduisent à d'autres relations de récurrence.

Il faut signaler que le modèle suppose un taux constant et ne tient compte ni de la fiscalité ni de l'inflation.

5 Deuxième exemple : population et capacité d'accueil

5.1 Énoncé

On considère une population dont l'effectif, exprimé en milliers d'individus, est modélisé par une suite (u_n) vérifiant

$$u_0 = 2, \qquad u_{n+1} = u_n + 0{,}2u_n\left(1 - \frac{u_n}{10}\right).$$

Le paramètre 10 représente une capacité d'accueil théorique. On cherche à comprendre l'évolution de la population.

5.2 Recherche des points fixes

On définit

$$f(x) = x + 0{,}2x\left(1 - \frac{x}{10}\right).$$

La relation de récurrence s'écrit

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Les points fixes vérifient $f(x) = x$, donc

$$0{,}2x\left(1 - \frac{x}{10}\right) = 0.$$

Les solutions sont 0 et 10.

Ces valeurs sont des équilibres possibles du modèle.

5.3 Étude de la monotonie

On calcule

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}2u_n\left(1 - \frac{u_n}{10}\right).$$

Par conséquent :

— si $0 < u_n < 10$, alors $u_{n+1} > u_n$;

— si $u_n = 10$, alors $u_{n+1} = u_n$;

— si $u_n > 10$, alors $u_{n+1} < u_n$.

Pour justifier une convergence, il reste à établir une bornitude adaptée. Dans le cas présent, on peut démontrer par récurrence que

$$0 < u_n < 10 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $0 < u_n < 10$, alors

$$u_{n+1} = u_n\,(1{,}2 - 0{,}02u_n) > 0$$

et

$$u_{n+1} - 10 = (u_n - 10)(1 - 0{,}02u_n) < 0.$$

La propriété est vraie au rang initial puisque $u_0 = 2$.

La suite est donc croissante et majorée par 10 ; elle converge.

5.4 Détermination de la limite

Soit ℓ sa limite. La fonction f étant continue,

$$\ell = \ell + 0{,}2\ell\left(1 - \frac{\ell}{10}\right).$$

Ainsi,

$$\ell = 0 \qquad \text{ou} \qquad \ell = 10.$$

Comme $u_n \geq u_0 = 2$, la limite ne peut être nulle. On obtient donc

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 10.}$$

La population se stabilise théoriquement à dix milliers d'individus.

5.5 Intérêt et limites du modèle

Cet exemple illustre l'étude d'une suite définie par une relation de récurrence non linéaire. Il permet d'introduire les points fixes et la recherche d'une limite par passage à la limite dans la relation de récurrence.

Le modèle suppose cependant que les paramètres restent constants. Il ne représente pas explicitement les migrations, les variations de ressources ou les événements exceptionnels.

6 Troisième exemple : approximation d'un nombre

6.1 Énoncé

On souhaite approcher $\sqrt{2}$ à l'aide de la méthode de Newton appliquée à l'équation $x^2-2=0$. On choisit $u_0 > 0$ et on définit

$$\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right).}$$

On prendra, par exemple, $u_0 = 2$.

6.2 Recherche d'un encadrement

Pour tout $x > 0$, l'inégalité arithmético-géométrique donne

$$\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \geq \sqrt{2}.$$

Par conséquent,

$$u_{n+1} \geq \sqrt{2}.$$

En particulier, $u_n > 0$ pour tout n. On vérifie que $u_1 \geq \sqrt{2}$, puis que tous les termes suivants vérifient également cette inégalité.

6.3 Étude de la monotonie

Pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 - u_n^2}{2u_n}.$$

À partir du rang 1, on a $u_n \geq \sqrt{2}$, donc

$$u_{n+1} - u_n \leq 0.$$

La suite est décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{2}$.

Elle converge donc vers une limite $\ell \geq \sqrt{2}$.

6.4 Calcul de la limite

La fonction

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

est continue sur $]0, +\infty[$. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient

$$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{2}{\ell}\right).$$

D'où

$$\ell^2 = 2.$$

Comme $\ell > 0$, on conclut que

$$\boxed{\ell = \sqrt{2}.}$$

6.5 Interprétation numérique

La méthode fournit une suite de valeurs approchant $\sqrt{2}$. Elle permet d'étudier la convergence d'un algorithme itératif et d'évaluer l'efficacité d'une méthode numérique.

On peut prolonger l'étude par une majoration de l'erreur $|u_n - \sqrt{2}|$ et par une comparaison avec d'autres algorithmes d'approximation.

7 Quatrième exemple : remplissage d'un réservoir

7.1 Énoncé

Un réservoir contient initialement 500 litres d'eau. Chaque jour, on retire 20 % du volume présent, puis on ajoute 30 litres.

On note u_n le volume d'eau, en litres, après n jours, avec $u_0 = 500$.

7.2 Relation de récurrence

Après le retrait, il reste $0{,}8u_n$ litres. Après l'ajout, le volume devient

$$\boxed{u_{n+1} = 0{,}8u_n + 30.}$$

7.3 Recherche d'un équilibre

Un volume d'équilibre ℓ vérifie

$$\ell = 0{,}8\ell + 30.$$

Ainsi,

$$0{,}2\ell = 30 \qquad \Longrightarrow \qquad \ell = 150.$$

On pose

$$v_n = u_n - 150.$$

Alors

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 150 = 0{,}8u_n + 30 - 150 = 0{,}8(u_n - 150).$$

Donc

$$v_{n+1} = 0{,}8v_n.$$

La suite (v_n) est géométrique, de premier terme $v_0 = 350$ et de raison 0,8. Ainsi,

$$v_n = 350(0{,}8)^n$$

et

$$\boxed{u_n = 150 + 350(0{,}8)^n.}$$

7.4 Convergence et interprétation

Puisque $0 < 0{,}8 < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} (0{,}8)^n = 0.$$

Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 150.}$$

Le volume se rapproche de 150 litres, qui constitue l'équilibre du modèle.

Cet exemple illustre une technique générale : lorsqu'une suite vérifie une relation affine

$$u_{n+1} = au_n + b, \qquad a \neq 1,$$

on peut rechercher le point fixe ℓ vérifiant $\ell = a\ell + b$, puis étudier la suite auxiliaire $v_n = u_n - \ell$.

8 Cinquième exemple : construction géométrique

8.1 Énoncé

On considère un carré d'aire 1. À chaque étape, on conserve une fraction $\frac{3}{4}$ de l'aire précédente.

On note u_n l'aire conservée à l'étape n, avec $u_0 = 1$.

8.2 Modélisation

La relation de récurrence est

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n.$$

La suite est géométrique et

$$\boxed{u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n.}$$

8.3 Limite

Comme $0 < \frac{3}{4} < 1$, la suite est strictement décroissante, positive et convergente. Sa limite est

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

La fraction d'aire conservée tend vers zéro. Cela ne signifie pas nécessairement que toutes les dimensions géométriques tendent vers zéro : il faut distinguer l'aire des longueurs et examiner précisément la construction.

Ce problème permet de discuter la signification géométrique d'une limite et la différence entre une grandeur et ses dimensions.

9 Outils mathématiques mobilisés

Les problèmes précédents font intervenir plusieurs outils fondamentaux.

9.1 Suites explicites

Une suite peut être donnée directement par

$$u_n = f(n).$$

Cette présentation permet souvent de calculer directement un terme et d'étudier la limite à partir des propriétés de la fonction f.

9.2 Suites définies par récurrence

Une suite est définie par récurrence lorsqu'un terme est obtenu à partir d'un ou plusieurs termes précédents :

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Il faut alors connaître le terme initial et la relation de récurrence pour déterminer les termes suivants.

9.3 Suites arithmétiques et géométriques

Les évolutions additives constantes conduisent aux suites arithmétiques :

$$u_{n+1} = u_n + r, \qquad u_n = u_0 + nr.$$

Les évolutions multiplicatives constantes conduisent aux suites géométriques :

$$u_{n+1} = qu_n, \qquad u_n = u_0 q^n.$$

Ces deux modèles apparaissent notamment dans les problèmes d'épargne, de dépréciation, d'évolution de stocks et d'itérations géométriques.

9.4 Points fixes

Pour une relation

$$u_{n+1} = f(u_n),$$

les points fixes sont les solutions de

$$f(x) = x.$$

Si la suite converge vers une limite ℓ et si f est continue au voisinage de ℓ, alors

$$\ell = f(\ell).$$

Cette condition est nécessaire, mais elle ne suffit pas, à elle seule, à démontrer la convergence de la suite.

9.5 Monotonie et bornitude

Le théorème de convergence des suites monotones bornées est particulièrement utile :

— toute suite croissante et majorée converge ;

— toute suite décroissante et minorée converge.

Dans une démonstration, il est nécessaire d'établir séparément la monotonie et la bornitude, en vérifiant notamment que les propriétés annoncées sont conservées par la relation de récurrence.

10 Apports des outils numériques

Un tableur, une calculatrice ou un programme informatique permettent de calculer les premiers termes d'une suite et d'observer son comportement.

Ces outils sont utiles pour :

— conjecturer la monotonie ;

— repérer un éventuel équilibre ;

— estimer une limite ;

— comparer plusieurs modèles ;

— rechercher le premier rang auquel un seuil est atteint.

Toutefois, un nombre fini de calculs ne démontre pas une propriété valable pour tout entier n. Les observations numériques doivent être complétées par une démonstration mathématique lorsque le problème l'exige.

On pourra également utiliser une représentation graphique des points (n, u_n) ou le diagramme de l'itération

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

11 Exercices proposés

Exercice 1 : intérêts simples et intérêts composés

Un capital de 2 000 euros est placé à un taux annuel de 4 %.

1. Définir la suite (u_n) représentant le capital après n années dans le cas des intérêts composés.
2. Donner une formule explicite de u_n.
3. Déterminer le premier rang pour lequel le capital dépasse 3 000 euros.
4. Comparer avec le modèle des intérêts simples.

Exercice 2 : abonnements et coûts cumulés

Un abonnement coûte initialement 25 euros par mois. Son prix augmente de 2 euros chaque année.

1. Modéliser le prix annuel mensuel par une suite.
2. Donner le terme général.
3. Déterminer à partir de quelle année le prix dépasse 40 euros par mois.
4. Calculer le coût cumulé sur plusieurs années et proposer une suite adaptée à cette nouvelle question.

Exercice 3 : décroissance d'une quantité

Une substance perd chaque heure 15 % de sa quantité. La quantité initiale est de 80 grammes.

1. Définir une suite modélisant la quantité restante.
2. Donner son terme général.
3. Étudier sa monotonie et sa limite.
4. Déterminer le premier rang à partir duquel la quantité est inférieure à 10 grammes.

Exercice 4 : suite affine

On définit

$$u_0 = 10, \qquad u_{n+1} = 0{,}6u_n + 8.$$

1. Calculer les trois premiers termes après u_0.
2. Déterminer le point fixe de la relation de récurrence.
3. Introduire une suite auxiliaire pour obtenir une formule explicite de u_n.
4. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 5 : suite logistique

On considère

$$u_0 = 1, \qquad u_{n+1} = u_n + 0{,}1u_n\left(1 - \frac{u_n}{8}\right).$$

1. Déterminer les points fixes.
2. Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
3. Montrer que la suite reste dans un intervalle adapté.
4. En déduire sa convergence et déterminer sa limite.

Exercice 6 : méthode de Newton

On définit

$$u_0 = 3, \qquad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{5}{u_n}\right).$$

1. Identifier le nombre que la suite doit approcher.
2. Montrer que u_n reste supérieur à ce nombre à partir du rang 1.
3. Étudier la monotonie de la suite à partir du rang 1.
4. Démontrer sa convergence et déterminer sa limite.

Exercice 7 : aire d'une figure fractale

Une construction géométrique conserve à chaque étape $\frac{2}{5}$ de l'aire précédente. L'aire initiale vaut 100 cm^2.

1. Définir la suite des aires.
2. Donner son terme général.
3. Déterminer la limite de la suite.
4. Interpréter cette limite et préciser ce qu'elle permet, ou non, de conclure sur la figure limite.

Exercice 8 : choix d'un modèle

Deux populations sont décrites par les modèles suivants :

$$u_0 = 100, \qquad u_{n+1} = 1{,}05u_n,$$

et

$$v_0 = 100, \qquad v_{n+1} = v_n + 10.$$

1. Identifier la nature de chaque suite.
2. Comparer les deux modèles pour les premiers rangs.
3. Étudier leur comportement à long terme.
4. Discuter les situations concrètes dans lesquelles chaque modèle pourrait être pertinent.

12 Éléments de correction et pistes

— **Exercice 1 :** intérêts composés : $u_n = 2000(1{,}04)^n$. Pour les intérêts simples, le modèle est $v_n = 2000 + 80n$.

— **Exercice 2 :** si $u_0 = 25$, alors $u_n = 25 + 2n$. Le seuil de 40 euros est dépassé au rang $n = 8$.

— **Exercice 3 :** $u_n = 80(0{,}85)^n$. La suite décroît vers zéro.

— **Exercice 4 :** le point fixe vaut 20. En posant $v_n = u_n - 20$, on obtient $v_{n+1} = 0{,}6v_n$, donc $u_n = 20 - 10(0{,}6)^n$.

— **Exercice 5 :** les points fixes sont 0 et 8. Pour le terme initial donné, on peut établir que la suite est croissante et reste inférieure à 8, puis conclure qu'elle converge vers 8.

— **Exercice 6 :** la limite recherchée est $\sqrt{5}$. La suite est décroissante à partir du rang 1 et minorée par $\sqrt{5}$.

— **Exercice 7 :** $u_n = 100(2/5)^n$ et $u_n \to 0$.

— **Exercice 8 :** la première suite est géométrique et la seconde arithmétique. Les deux modèles divergent vers $+\infty$, mais leurs rythmes de croissance sont différents.

13 Conclusion

Les suites numériques permettent de décrire et d'étudier des phénomènes discrets, c'est-à-dire des évolutions observées à des étapes successives.

Les situations rencontrées conduisent à distinguer plusieurs types de modèles : suites arithmétiques, suites géométriques, suites affines et suites définies par une relation de récurrence non linéaire.

L'étude rigoureuse d'une suite mobilise le calcul des termes, la monotonie, la bornitude et, lorsque cela est possible, la détermination d'une limite. La recherche des points fixes est particulièrement utile pour les suites récurrentes.

Enfin, l'interprétation des résultats doit toujours revenir au problème initial. Une limite mathématique n'est pertinente dans le contexte étudié que si les hypothèses du modèle restent adaptées à la situation considérée.

14 Références bibliographiques

1. **Ministère de l'Éducation nationale**, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, notamment les programmes de première et de terminale, pour les suites numériques et leur étude. Les versions applicables sont consultables sur https://www.education.gouv.fr/.
2. **Ministère de l'Éducation nationale**, *Programme du concours du CAPES externe de mathématiques*. Consulter la session concernée et ses documents officiels sur https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.
3. **Walter Rudin**, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill. Référence pour les suites réelles, la convergence et les propriétés de $\mathbb{R}$.
4. **Jean-Marie Monier**, *Analyse MPSI*, Dunod. Ouvrage de référence pour les suites numériques, les relations de récurrence et les méthodes de convergence.
5. **Hervé Le Ferrand**, *Mathématiques : cours et exercices corrigés*, ouvrages de préparation et d'approfondissement en analyse. Vérifier l'édition retenue selon le niveau et le programme.

6. **Nicolas Bourbaki**, *Éléments de mathématique : Topologie générale*, Hermann. Référence théorique complémentaire sur les notions de convergence et de structure de $\mathbb{R}$.