Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Limite d'une fonction réelle de variable réelle

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Introduction et motivation **2**

3 Définitions des limites **2**
- 3.1 Limite finie en un point . . . 2
- 3.2 Limites à gauche et à droite . . . 3
- 3.3 Limites infinies en un point . . . 3
- 3.4 Limites en l'infini . . . 4

4 Premières propriétés **4**
- 4.1 Unicité et caractérisation séquentielle . . . 4
- 4.2 Conservation des inégalités . . . 4
- 4.3 Théorème de comparaison . . . 5
- 4.4 Limites et ordre . . . 5

5 Opérations sur les limites **5**
- 5.1 Somme, produit et quotient . . . 5
- 5.2 Formes indéterminées . . . 6
- 5.3 Exemples de calcul . . . 6

6 Limites des fonctions usuelles **6**
- 6.1 Fonctions polynomiales . . . 6
- 6.2 Fonctions rationnelles . . . 7
- 6.3 Fonction inverse . . . 7
- 6.4 Fonctions exponentielle et logarithme . . . 7
- 6.5 Fonctions trigonométriques . . . 7

7 Composition et changement de variable **8**

8 Limites et continuité **8**

9 Asymptotes et interprétation graphique **9**
- 9.1 Asymptote verticale . . . 9
- 9.2 Asymptote horizontale . . . 9
- 9.3 Asymptote oblique . . . 9

10 Méthodes de résolution **10**

11 Liste d'exercices **10**
- 11.1 Exercice 1 : limites élémentaires . . . 10
- 11.2 Exercice 2 : limites latérales . . . 10
- 11.3 Exercice 3 : factorisation . . . 11
- 11.4 Exercice 4 : conjugaison . . . 11
- 11.5 Exercice 5 : fonctions rationnelles . . . 11

11.6 Exercice 6 : théorème des gendarmes 11
11.7 Exercice 7 : fonction exponentielle 11
11.8 Exercice 8 : fonction logarithme 11
11.9 Exercice 9 : existence d'une limite 11
11.10 Exercice 10 : asymptotes 11
11.11 Exercice 11 : fonction définie par morceaux 12
11.12 Exercice 12 : approfondissement 12

12 Éléments de correction des exercices **12**

13 Conclusion **13**

14 Références bibliographiques **13**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis

Cette leçon suppose connus :

— les propriétés algébriques et l'ordre sur $\mathbb{R}$;

— la valeur absolue et les inégalités ;

— les fonctions usuelles : fonctions polynomiales, rationnelles, exponentielle, logarithme et fonctions trigonométriques ;

— les notions de fonction, de domaine de définition et de représentation graphique ;

— les suites numériques et, idéalement, la notion de convergence d'une suite ;

— les quantificateurs et les raisonnements par implication, contraposée et encadrement.

Objectifs

L'objectif est de définir rigoureusement la limite d'une fonction réelle de variable réelle, en un point ou à l'infini, et de distinguer les limites finies et infinies. On étudie les limites à gauche et à droite, les opérations sur les limites, les théorèmes de comparaison et d'encadrement, ainsi que les limites des fonctions usuelles. La leçon vise également à donner des méthodes de calcul efficaces, à interpréter graphiquement les limites et à faire le lien avec la continuité et les asymptotes.

2 Introduction et motivation

La notion de limite permet de décrire le comportement d'une fonction lorsque sa variable s'approche d'une valeur donnée ou devient arbitrairement grande en valeur absolue.

Elle intervient notamment :

— dans la définition de la continuité et de la dérivabilité ;

— dans l'étude des branches infinies des courbes ;

— dans le calcul des asymptotes ;

— dans l'étude des variations et des extremums ;

— dans les problèmes de modélisation, notamment en physique et en économie.

Par exemple, la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, tandis que sa valeur devient arbitrairement grande lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.

Il faut donc distinguer la valeur d'une fonction en un point et son comportement au voisinage de ce point.

3 Définitions des limites

3.1 Limite finie en un point

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et soit $a \in \mathbb{R}$ un point adhérent à D.

Définition 3.1. On dit que $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a, et l'on écrit

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in D$,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Cette définition signifie que l'on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ, en imposant à x d'être suffisamment proche de a, sans nécessairement être égal à a.

Exemple 3.2. Pour $f(x) = 2x + 1$, on a

$$\lim_{x \to 3} (2x + 1) = 7.$$

En effet,

$$|(2x + 1) - 7| = 2|x - 3|.$$

Il suffit de choisir $\delta = \varepsilon/2$.

Remarque 3.3. La fonction n'a pas besoin d'être définie en a pour admettre une limite en a. Même lorsque $f(a)$ existe, la limite peut être différente de $f(a)$.

3.2 Limites à gauche et à droite

Définition 3.4. On dit que f admet ℓ pour limite à gauche en a si

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \ell.$$

On définit de même la limite à droite :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \ell.$$

Théorème 3.5. *La limite de f en a existe et vaut ℓ si et seulement si les limites à gauche et à droite existent et sont toutes deux égales à ℓ, lorsque ces deux approches sont pertinentes dans le domaine considéré.*

Exemple 3.6. Considérons la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Les deux limites étant différentes, f n'admet pas de limite en 0.

3.3 Limites infinies en un point

Définition 3.7. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers a si, pour tout $A > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$x \in D, \quad 0 < |x - a| < \delta \quad \Longrightarrow \quad f(x) > A.$$

On note

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty.$$

La définition de la limite $-\infty$ s'obtient en remplaçant $f(x) > A$ par $f(x) < -A$.

Exemple 3.8. Pour $f(x) = 1/x^2$, on a

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty.$$

En revanche,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

3.4 Limites en l'infini

Définition 3.9. On dit que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D, \quad x > M \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

La définition de la limite en $-\infty$ est analogue : il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x < M$ entraîne $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Définition 3.10. On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$x \in D, \quad x > M \quad \Longrightarrow \quad f(x) > A.$$

Les autres limites infinies se définissent de manière analogue.

Exemple 3.11. On a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,$$

et

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

4 Premières propriétés

4.1 Unicité et caractérisation séquentielle

Théorème 4.1 (Unicité de la limite)**.** *Si f admet une limite finie en un point a, cette limite est unique.*

Théorème 4.2 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit a un point adhérent à D. La fonction f admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ en a si et seulement si, pour toute suite (x_n) d'éléments de $D \setminus \{a\}$ convergeant vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers ℓ.*

Cette caractérisation est particulièrement utile pour montrer qu'une limite n'existe pas : il suffit de trouver deux suites convergeant vers le même point mais dont les images ont des limites différentes, ou une suite dont l'image ne converge pas vers la limite supposée.

4.2 Conservation des inégalités

Propriété 4.3. *Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, sauf éventuellement en a, et si f et g admettent des limites finies ℓ et m en a, alors*

$$\ell \leq m.$$

Théorème 4.4 (Théorème des gendarmes)**.** *Si, au voisinage de a,*

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et si

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = \ell,$$

alors

$$\lim_{x\to a} g(x) = \ell.$$

Le résultat reste valable lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple 4.5. Puisque

$$-\frac{1}{x^2} \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq \frac{1}{x^2} \qquad (x \neq 0),$$

et que les deux bornes tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 0.$$

4.3 Théorème de comparaison

Théorème 4.6. *Supposons que $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de $+\infty$. Si*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$$

alors

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty.$$

Une formulation analogue vaut pour les limites $-\infty$ et pour les comparaisons appropriées.

4.4 Limites et ordre

Propriété 4.7. *Si $f(x) \geq 0$ au voisinage de a et si f admet une limite finie ℓ en a, alors $\ell \geq 0$.*

En particulier, si $f(x) \to \ell$ avec $\ell > 0$, alors $f(x) > 0$ au voisinage de a. Ce résultat est utile pour déterminer le signe d'une expression et simplifier les calculs de limites.

5 Opérations sur les limites

Dans cette section, on suppose que les fonctions considérées sont définies au voisinage du point étudié, ou pour des valeurs suffisamment grandes de x.

5.1 Somme, produit et quotient

Théorème 5.1. *Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell, \qquad \lim_{x\to a} g(x) = m,$$

avec $\ell, m \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \ell + m,$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \ell m.$$

Si $m \neq 0$, alors $g(x) \neq 0$ au voisinage de a et

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\ell}{m}.$$

On obtient également, pour toute constante $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda \ell.$$

Ces règles s'appliquent aussi aux limites en $+\infty$ et en $-\infty$, avec les adaptations nécessaires lorsque les limites sont infinies.

5.2 Formes indéterminées

Les opérations précédentes ne permettent pas de conclure directement dans certains cas. Les formes classiques sont

$$+\infty - \infty, \qquad 0 \times \infty, \qquad \frac{0}{0}, \qquad \frac{\infty}{\infty},$$

ainsi que, dans le cadre des puissances,

$$1^{\infty}, \qquad 0^0, \qquad \infty^0.$$

Ces expressions ne sont pas des résultats de limites : elles indiquent seulement que les règles usuelles ne suffisent pas. Il faut transformer l'expression ou utiliser un théorème adapté.

5.3 Exemples de calcul

Exemple 5.2. Pour $x \neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$$

Exemple 5.3. Pour $x > 0$,

$$\frac{3x^2-2x+1}{x^2+4} = \frac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{4}{x^2}}.$$

Ainsi,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2x+1}{x^2+4} = 3.$$

Exemple 5.4. On a

$$\lim_{x\to+\infty} (x^2+1) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Cependant, ces deux informations ne suffisent pas à déterminer la limite du produit sans examiner l'expression plus précisément.

6 Limites des fonctions usuelles

6.1 Fonctions polynomiales

Pour un polynôme

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0, \qquad a_n \neq 0,$$

le terme dominant détermine le comportement à l'infini :

$$P(x) \sim a_n x^n \quad \text{lorsque } x \to \pm\infty.$$

En particulier, pour $n \geq 1$,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } a_n > 0, \\ -\infty & \text{si } a_n < 0. \end{cases}$$

En $-\infty$, le signe dépend également de la parité de n.

6.2 Fonctions rationnelles

Soient P et Q deux polynômes, avec Q non nul. Pour étudier

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{lorsque } x \to \pm\infty,$$

on compare les degrés de P et de Q.

Si $\deg P < \deg Q$, alors

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0.$$

Si $\deg P = \deg Q$, alors la limite est le quotient des coefficients dominants.

Si $\deg P > \deg Q$, le comportement est celui du quotient des termes dominants :

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \sim \frac{a_p}{b_q} x^{p-q},$$

où a_p et b_q sont les coefficients dominants et $p = \deg P$, $q = \deg Q$.

6.3 Fonction inverse

On connaît les limites fondamentales :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

et

$$\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

6.4 Fonctions exponentielle et logarithme

Pour la fonction exponentielle,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Pour le logarithme népérien,

$$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty.$$

On dispose également des résultats de croissance comparée :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \qquad (\alpha > 0),$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

6.5 Fonctions trigonométriques

La fonction sinus est bornée :

$$-1 \le \sin x \le 1.$$

Le théorème des gendarmes permet donc de conclure que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

En revanche, $\sin x$ n'admet pas de limite en $+\infty$. En effet, pour

$$x_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \qquad y_n = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi,$$

on a $x_n \to +\infty$, $y_n \to +\infty$, mais

$$\sin x_n = 1, \qquad \sin y_n = -1.$$

7 Composition et changement de variable

Théorème 7.1 (Limite d'une fonction composée)**.** *Supposons que*

$$\lim_{x\to a} g(x) = b$$

et que

$$\lim_{y\to b} f(y) = \ell.$$

Sous les conditions de domaine et de voisinage permettant la composition, on a

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \ell.$$

Ce théorème s'applique notamment lorsque $g(x) \to b$ sans que $g(x)$ soit nécessairement égal à b.

Exemple 7.2. Comme

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

et

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1,$$

on obtient

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1.$$

Remarque 7.3. Un changement de variable peut simplifier un calcul de limite. Il convient toutefois de vérifier le sens dans lequel la nouvelle variable tend vers sa limite.

8 Limites et continuité

Définition 8.1. Une fonction f définie en a est continue en a si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

La continuité exprime donc l'égalité entre la limite de la fonction en un point et sa valeur en ce point.

Théorème 8.2. *Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine de définition. Les fonctions exponentielle, logarithme, sinus et cosinus sont continues sur leurs domaines respectifs.*

Exemple 8.3. Considérons

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1, \\ 3 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Pour $x \neq 1$, on a $f(x) = x + 1$, donc

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq f(1).$$

La fonction n'est pas continue en 1.

9 Asymptotes et interprétation graphique

9.1 Asymptote verticale

Définition 9.1. La droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de f si au moins l'une des limites latérales de f en a est infinie.

Exemple 9.2. La courbe de la fonction inverse

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

admet la droite $x = 0$ comme asymptote verticale.

9.2 Asymptote horizontale

Définition 9.3. Si

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R},$$

alors la droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

Exemple 9.4. Pour

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+3},$$

on obtient

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{x+3} = 2.$$

La droite $y = 2$ est donc une asymptote horizontale en $+\infty$.

9.3 Asymptote oblique

Définition 9.5. La droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$ si

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (ax+b)\big) = 0.$$

Pour déterminer une telle asymptote, on peut chercher des constantes a et b telles que

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

puis

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - ax),$$

lorsque ces limites existent et sont finies.

Exemple 9.6. Pour

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x},$$

on écrit

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Comme $1/x \to 0$ lorsque $x \to +\infty$, la droite $y = x$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

10 Méthodes de résolution

Pour calculer une limite, on peut suivre la démarche suivante :

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction.
2. Identifier le point ou la direction vers laquelle la variable tend.
3. Substituer directement la valeur lorsque les opérations utilisées sont compatibles avec les limites connues.
4. En présence d'une forme indéterminée, transformer l'expression : factorisation, mise au même dénominateur, division par le terme dominant ou conjugaison.
5. Utiliser les limites usuelles, les théorèmes de comparaison, le théorème des gendarmes ou celui de composition.
6. Vérifier la cohérence du résultat, notamment le signe et l'interprétation graphique.

Exemple de synthèse

Calculons

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 4}.$$

En divisant le numérateur et le dénominateur par x^2, on obtient

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}}.$$

Comme

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0,$$

le dénominateur tend vers 1. Il vient donc

$$\boxed{L = 2}.$$

11 Liste d'exercices

Les exercices suivants sont classés par difficulté croissante. Ils peuvent servir à illustrer les définitions, à vérifier les résultats fondamentaux ou à prolonger la leçon lors de l'oral.

11.1 Exercice 1 : limites élémentaires

Calculer les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to 2} (3x^2 - 4x + 1)$;

b) $\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 3x}{x + 3}$;

c) $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{5x + 2}{x^2 + 1}$;

d) $\lim_{x \to -\infty} (2x^3 - x)$.

11.2 Exercice 2 : limites latérales

Étudier les limites à gauche et à droite en 0 de

$$f(x) = \frac{x}{|x|}, \qquad x \neq 0.$$

La fonction admet-elle une limite en 0 ?

11.3 Exercice 3 : factorisation

Calculer

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}.$$

Expliquer pourquoi la substitution directe ne permet pas de conclure, puis proposer une transformation.

11.4 Exercice 4 : conjugaison

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-x\right).$$

Indication : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.

11.5 Exercice 5 : fonctions rationnelles

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de

$$f(x)=\frac{4x^3-x+1}{2x^3+3x^2-5}.$$

Que peut-on en déduire sur les asymptotes horizontales ?

11.6 Exercice 6 : théorème des gendarmes

En utilisant un encadrement, déterminer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2+\sin x}{x}.$$

11.7 Exercice 7 : fonction exponentielle

Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} xe^x.$$

Préciser les résultats de croissance comparée utilisés.

11.8 Exercice 8 : fonction logarithme

Calculer

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

11.9 Exercice 9 : existence d'une limite

Montrer que la fonction $f(x)=\cos(1/x)$, définie pour $x\neq 0$, n'admet pas de limite en 0.
Indication : utiliser deux suites adaptées.

11.10 Exercice 10 : asymptotes

Étudier les asymptotes de la fonction

$$f(x)=\frac{x^2+2x+3}{x+1}.$$

On cherchera une asymptote verticale et une asymptote oblique.

11.11 Exercice 11 : fonction définie par morceaux

Déterminer les réels a et b pour lesquels la fonction

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 1, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

est continue en 1.

11.12 Exercice 12 : approfondissement

Soit $\alpha > 0$. Démontrer que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

On pourra poser $t = \alpha \ln x$, puis utiliser la croissance comparée entre une fonction logarithmique et une fonction exponentielle.

12 Éléments de correction des exercices

Exercice 1.

$$9, \qquad 0, \qquad 0, \qquad -\infty.$$

Exercice 2. Les limites latérales sont

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1.$$

La limite en 0 n'existe donc pas.

Exercice 3. Pour $x \neq 2$,

$$\frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2.$$

La limite vaut 4.

Exercice 4. Pour $x > 0$,

$$\sqrt{x^2 + 3x} - x = \frac{3x}{\sqrt{x^2 + 3x} + x}.$$

En divisant par x au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\frac{3}{\sqrt{1 + 3/x} + 1} \longrightarrow \frac{3}{2}.$$

Exercice 5. Les degrés du numérateur et du dénominateur sont égaux. Les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ valent 2. La droite $y = 2$ est une asymptote horizontale aux deux extrémités.

Exercice 6. Puisque

$$\frac{1}{x} \leq \frac{2 + \sin x}{x} \leq \frac{3}{x} \qquad (x > 0),$$

les deux bornes tendent vers 0. La limite vaut donc 0.

Exercice 7. Les deux limites valent 0 :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0, \qquad \lim_{x \to -\infty} x e^x = 0.$$

Exercice 8. Les deux limites valent 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

Exercice 9. Posons

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \qquad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi}.$$

Ces suites tendent vers 0^+, tandis que

$$\cos(1/x_n) = 1, \qquad \cos(1/y_n) = -1.$$

La limite n'existe donc pas.

Exercice 10. On écrit

$$\frac{x^2+2x+3}{x+1} = x+1+\frac{2}{x+1}.$$

La droite $x=-1$ est une asymptote verticale et la droite $y=x+1$ est une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 11. La continuité en 1 impose

$$a+b=2.$$

Il existe donc une infinité de solutions : a est arbitraire et $b=2-a$.

Exercice 12. En posant $t=\ln x$, on a $t\to+\infty$ et

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{t}{e^{\alpha t}}.$$

La croissance comparée donne une limite nulle.

13 Conclusion

La notion de limite constitue un outil central de l'analyse réelle. Sa définition rigoureuse permet de décrire le comportement local ou à l'infini d'une fonction, indépendamment de sa valeur en un point.

Les théorèmes de comparaison, d'encadrement et de composition, associés aux opérations sur les limites et à la connaissance des fonctions usuelles, permettent de traiter une grande variété de calculs. Les limites jouent enfin un rôle essentiel dans la définition de la continuité, l'étude des asymptotes et, plus généralement, dans l'analyse du comportement des fonctions.

À l'oral du CAPES, il est important de ne pas réduire cette notion à des calculs algébriques : les définitions, les hypothèses des théorèmes et les contre-exemples doivent également être maîtrisés.

14 Références bibliographiques

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris.

[2] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, Paris.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques, tout-en-un pour la licence*, Dunod, Paris.

[4] J.-M. Monier, *Analyse MP*, Dunod, Paris.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, notamment les parties consacrées aux limites de fonctions et à la continuité. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[6] Société mathématique de France, *Ressources et documents pour la préparation aux concours d'enseignement en mathématiques*. https://smf.emath.fr/