Théorème des valeurs intermédiaires

Leçon d'oral de CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Introduction et motivation **2**

3 Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires **2**

4 Démonstration du théorème **3**

5 Conséquences fondamentales **3**
- 5.1 Existence d'une racine . . . 3
- 5.2 Image d'un intervalle par une fonction continue . . . 4
- 5.3 Théorème des valeurs intermédiaires et monotonie . . . 4

6 Exemples d'application **4**
- 6.1 Une équation polynomiale . . . 4
- 6.2 Une équation exponentielle . . . 5
- 6.3 Une fonction définie par morceaux . . . 5

7 Méthode de résolution d'une équation **5**

8 Approximation numérique : la dichotomie **6**

9 Contre-exemples et limites du théorème **6**
- 9.1 L'absence de continuité . . . 6
- 9.2 L'existence ne signifie pas l'unicité . . . 6
- 9.3 Continuité sur un intervalle non fermé . . . 6

10 Exercices **7**
- 10.1 Exercices fondamentaux . . . 7
- 10.2 Exercices d'approfondissement . . . 7

11 Questions possibles du jury **8**

12 Conclusion **8**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de fonction réelle d'une variable réelle, d'intervalle de $\mathbb{R}$, de continuité en un point et sur un intervalle, ainsi que les propriétés élémentaires des inégalités et de la valeur absolue. La compréhension des démonstrations repose également sur la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$: toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Objectifs. L'objectif principal est d'énoncer, de comprendre et d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires (TVI). Il s'agit notamment :

- de relier continuité et prise de valeurs ;
- de démontrer le TVI à partir de la complétude de $\mathbb{R}$;
- de savoir établir l'existence d'une solution à une équation $f(x) = \lambda$;
- d'utiliser le TVI pour démontrer l'existence d'une racine d'une fonction continue ;
- de distinguer existence et unicité d'une solution ;
- d'étudier quelques applications, notamment aux équations numériques et aux suites.

2 Introduction et motivation

Le théorème des valeurs intermédiaires formalise une propriété intuitive des fonctions continues : une fonction continue ne peut pas passer d'une valeur à une autre sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

Par exemple, si une température modélisée par une fonction continue passe de 15 degrés à 22 degrés au cours d'une journée, elle prend nécessairement la valeur 18 degrés à un instant intermédiaire.

En mathématiques, cette idée permet de prouver l'existence de solutions d'équations sans nécessairement les calculer explicitement.

La continuité est essentielle : une fonction discontinue peut prendre des valeurs positives et négatives sans s'annuler.

3 Énoncé du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3.1 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$.*

Pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$f(c) = \lambda.$$

Autrement dit, si

$$f(a) \leq \lambda \leq f(b)$$

ou

$$f(b) \leq \lambda \leq f(a),$$

alors l'équation $f(x) = \lambda$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.

Remarque 3.2. Le point c n'est pas nécessairement unique. Le théorème affirme l'existence d'une solution, et non son unicité.

Remarque 3.3. L'hypothèse de continuité sur tout l'intervalle est essentielle. La continuité aux seules extrémités ne suffit pas.

4 Démonstration du théorème

On peut démontrer le TVI en utilisant la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$.

Démonstration. On suppose, sans perte de généralité, que

$$f(a) \leq \lambda \leq f(b).$$

Considérons l'ensemble

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \lambda\}.$$

Cet ensemble est non vide puisque $a \in A$. Il est majoré par b. Il admet donc une borne supérieure $c = \sup A$, avec $c \in [a, b]$.

Montrons que $f(c) = \lambda$.

Première étape : $f(c) \leq \lambda$.

Par la définition de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de A telle que

$$x_n \longrightarrow c.$$

Comme f est continue en c,

$$f(x_n) \longrightarrow f(c).$$

Or $f(x_n) \leq \lambda$ pour tout n. En passant à la limite, on obtient

$$f(c) \leq \lambda.$$

Deuxième étape : $f(c) \geq \lambda$.

Supposons par l'absurde que $f(c) < \lambda$.

Par continuité de f en c, il existe un voisinage de c dans lequel $f(x) < \lambda$. Si $c < b$, on peut alors choisir un réel y tel que

$$c < y \leq b \qquad \text{et} \qquad f(y) < \lambda.$$

On aurait donc $y \in A$, ce qui contredit $c = \sup A$.

Si $c = b$, l'hypothèse $f(c) < \lambda$ contredit directement $f(b) \geq \lambda$.

Ainsi, $f(c) \geq \lambda$.

En réunissant les deux inégalités, on obtient

$$f(c) = \lambda.$$

Le théorème est démontré. □

Remarque 4.1. Cette démonstration illustre le lien fondamental entre la continuité et la complétude de $\mathbb{R}$. D'autres preuves sont possibles, notamment par dichotomie.

5 Conséquences fondamentales

5.1 Existence d'une racine

Corollaire 5.1 (Théorème de la racine)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si*

$$f(a)f(b) < 0,$$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = 0.$$

Démonstration. Les nombres $f(a)$ et $f(b)$ étant de signes opposés, 0 est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$. Le TVI appliqué à la valeur $\lambda = 0$ assure l'existence de $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$. Comme $f(a)$ et $f(b)$ sont non nuls, c ne peut être égal à a ni à b. Donc $c \in]a, b[$. □

Remarque 5.2. Si l'on sait seulement que $f(a)f(b) \leq 0$, alors une racine existe dans $[a, b]$, mais elle peut être située à une extrémité.

5.2 Image d'un intervalle par une fonction continue

Théorème 5.3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Soient $u, v \in f(I)$ avec $u < v$. Il existe $x, y \in I$ tels que $f(x) = u$ et $f(y) = v$.

L'intervalle I contient l'intervalle délimité par x et y. En appliquant le TVI à la restriction de f à cet intervalle, on obtient, pour tout $\lambda \in [u, v]$, un point $z \in I$ tel que $f(z) = \lambda$.

Ainsi, tout réel compris entre deux éléments de $f(I)$ appartient à $f(I)$. Par conséquent, $f(I)$ est un intervalle. □

Remarque 5.4. L'image d'un intervalle ouvert ou non borné n'est pas nécessairement un intervalle fermé ou borné. Par exemple, l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle est $]0, +\infty[$.

5.3 Théorème des valeurs intermédiaires et monotonie

La monotonie n'est pas nécessaire pour appliquer le TVI. Elle permet toutefois d'obtenir des résultats d'unicité.

Théorème 5.5 (Existence et unicité)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone. Pour tout réel λ strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un unique $c \in]a, b[$ tel que*

$$f(c) = \lambda.$$

Démonstration. L'existence découle du TVI.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe $c_1 < c_2$ tels que $f(c_1) = f(c_2) = \lambda$. La stricte monotonie implique $f(c_1) \neq f(c_2)$, ce qui est contradictoire. □

Remarque 5.6. La stricte monotonie est une condition suffisante d'unicité, mais elle n'est pas nécessaire dans tous les cas.

6 Exemples d'application

6.1 Une équation polynomiale

Considérons l'équation

$$x^3 + x - 1 = 0.$$

Posons $f(x) = x^3 + x - 1$. Cette fonction polynomiale est continue sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$f(0) = -1 < 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = 1 > 0.$$

Le théorème de la racine assure donc l'existence d'un réel $c \in]0, 1[$ tel que

$$c^3 + c - 1 = 0.$$

Comme

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction f est strictement croissante. Cette racine est donc unique.

6.2 Une équation exponentielle

Considérons

$$e^x = 2x + 3.$$

Posons

$$g(x) = e^x - 2x - 3.$$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$. On a

$$g(-1) = e^{-1} - 1 < 0$$

et

$$g(0) = 1 - 3 = -2 < 0.$$

Ces deux valeurs ne permettent pas de conclure à l'existence d'une racine dans $[-1, 0]$.

En revanche,

$$g(2) = e^2 - 7 > 0,$$

tandis que

$$g(0) = -2 < 0.$$

Le TVI garantit donc au moins une racine dans $]0, 2[$.

Cet exemple rappelle qu'il faut vérifier les signes aux extrémités avant d'appliquer le théorème.

6.3 Une fonction définie par morceaux

Considérons

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

En 0, la limite à gauche vaut 1, et la valeur $f(0)$ vaut également 1. La fonction est donc continue en 0, et elle est continue sur $\mathbb{R}$.

Le TVI s'applique sur tout segment de $\mathbb{R}$. Cet exemple montre qu'une fonction définie par morceaux peut être continue, à condition de vérifier les raccords.

7 Méthode de résolution d'une équation

Pour établir l'existence d'une solution à une équation $f(x) = 0$, on peut suivre la démarche suivante :

1. Définir la fonction auxiliaire f.
2. Déterminer un intervalle $[a, b]$ adapté.
3. Vérifier la continuité de f sur $[a, b]$.
4. Calculer $f(a)$ et $f(b)$.
5. Vérifier que les valeurs sont de signes opposés, ou qu'une extrémité est déjà une racine.
6. Conclure en citant précisément le TVI.
7. Étudier séparément l'unicité, si elle est demandée.

Une rédaction rigoureuse doit distinguer les deux questions suivantes :

— *Existence :* le TVI permet de garantir au moins une solution.

— *Unicité :* elle nécessite un argument supplémentaire, par exemple la stricte monotonie.

8 Approximation numérique : la dichotomie

Le TVI justifie une méthode élémentaire de recherche approchée d'une racine.

Supposons f continue sur $[a, b]$ et $f(a)f(b) < 0$.

On partage l'intervalle en deux à l'aide de

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Si $f(m) = 0$, on a trouvé une racine. Sinon, l'une des deux paires d'extrémités (a, m) ou (m, b) conserve des valeurs de signes opposés. On conserve cet intervalle et on recommence.

Après n étapes, l'intervalle obtenu a pour longueur

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

Si c est une racine contenue dans l'intervalle conservé et m_n son milieu, alors

$$|m_n - c| \leq \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

La dichotomie fournit donc une approximation de la racine avec une précision arbitrairement petite.

Remarque 8.1. La dichotomie assure l'existence d'une racine dans l'intervalle initial. Elle ne garantit pas que la racine soit unique, sauf hypothèse supplémentaire.

9 Contre-exemples et limites du théorème

9.1 L'absence de continuité

Considérons

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

Sur $[-1, 1]$, on a

$$f(-1) = -1, \qquad f(1) = 1.$$

Pourtant, il n'existe aucun $x \in [-1, 1]$ tel que $f(x) = 0$.

La fonction n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la continuité ne peut pas être supprimée de l'énoncé du TVI.

9.2 L'existence ne signifie pas l'unicité

La fonction

$$f(x) = x^2$$

est continue sur $[-2, 2]$. L'équation

$$f(x) = 1$$

possède deux solutions, -1 et 1.

Le TVI garantit l'existence de solutions, mais ne permet pas à lui seul d'en déterminer le nombre.

9.3 Continuité sur un intervalle non fermé

Le TVI s'applique également sur un segment inclus dans un intervalle ouvert, mais on ne peut pas appliquer directement sa version sur $[a, b]$ à une fonction qui n'est définie que sur $]a, b[$.

Par exemple, la fonction $f(x) = 1/x$ est continue sur $]0, 1[$, mais elle n'y prend aucune valeur négative. Il faut donc distinguer la continuité sur un intervalle et les hypothèses précises de chaque énoncé.

10 Exercices

Les exercices suivants sont classés par difficulté croissante. Ils peuvent servir à illustrer la leçon ou à préparer les questions du jury.

10.1 Exercices fondamentaux

Exercice 10.1 (Existence d'une racine)**.** Soit

$$f(x) = x^3 - 2x - 1.$$

a) Calculer $f(1)$ et $f(2)$.

b) Montrer que f possède une racine dans $]1, 2[$.

c) Étudier la monotonie de f sur $[1, 2]$.

d) Peut-on conclure à l'unicité de la racine dans cet intervalle ?

Exercice 10.2 (Une équation trigonométrique)**.** Montrer que l'équation

$$\cos x = x$$

admet au moins une solution dans $[0, 1]$. Étudier ensuite l'unicité de cette solution.

Exercice 10.3 (Valeur intermédiaire)**.** Soit $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ continue, avec $f(0) = -3$ et $f(2) = 5$.

a) Montrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution dans $[0, 2]$.

b) Peut-on affirmer que cette solution est unique ?

c) Peut-on affirmer que f s'annule ?

10.2 Exercices d'approfondissement

Exercice 10.4 (Image d'un intervalle)**.** Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue. Démontrer que $f(I)$ est un intervalle.

Donner ensuite un exemple d'une fonction continue dont l'image est un intervalle ouvert, puis un exemple dont l'image est un intervalle non borné.

Exercice 10.5 (Équation avec paramètre)**.** Soit $a > 0$. Montrer que l'équation

$$x^3 + ax = 1$$

admet une unique solution réelle.

On pourra étudier la continuité et la monotonie de la fonction $f(x) = x^3 + ax - 1$.

Exercice 10.6 (Une racine entre deux entiers)**.** Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, l'équation

$$x^3 + x = n$$

admet une unique solution dans $[0, n]$.

Préciser le rôle du TVI et celui de la monotonie.

Exercice 10.7 (Dichotomie)**.** On considère

$$f(x) = x^3 - x - 1.$$

a) Montrer que f admet une racine dans $[1, 2]$.

b) Effectuer deux étapes de dichotomie.

c) Donner un encadrement de la racine après ces deux étapes.

d) Combien d'étapes suffisent pour obtenir un encadrement de longueur inférieure à 10^{-3} ?

Exercice 10.8 (Contre-exemple)**.** Construire une fonction définie sur $[-1, 1]$ qui prend des valeurs négatives et positives, mais ne s'annule pas. Expliquer pourquoi cet exemple ne contredit pas le TVI.

11 Questions possibles du jury

1. Pourquoi la continuité est-elle indispensable dans le TVI ?
2. Quelle propriété de $\mathbb{R}$ intervient dans la démonstration par la borne supérieure ?
3. Quelle différence existe-t-il entre le TVI et le théorème des bornes atteintes ?
4. Le TVI permet-il de prouver l'unicité d'une racine ?
5. Peut-on appliquer le TVI à une fonction continue sur un intervalle ouvert ?
6. Comment le TVI justifie-t-il la méthode de dichotomie ?
7. Le TVI est-il une conséquence de la dérivabilité ?
8. Une fonction continue injective sur un intervalle est-elle strictement monotone ?

12 Conclusion

Le théorème des valeurs intermédiaires est un résultat central de l'analyse réelle. Il traduit une conséquence essentielle de la continuité : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Ses applications principales sont la démonstration d'existence de solutions d'équations, l'étude des racines des fonctions continues et la justification de méthodes numériques comme la dichotomie.

Pour une présentation orale, il convient de maîtriser l'énoncé précis du théorème, une démonstration rigoureuse, les hypothèses nécessaires et la distinction entre existence et unicité.

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 2e édition, 2008.

[2] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill, 3e édition, 1976.

[3] T. Tao, *Analysis I*, Hindustan Book Agency, 3e édition, 2016.

[4] J.-M. Monier, *Analyse MP*, Dunod, différentes éditions.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques des classes préparatoires et des cycles secondaires*, textes officiels disponibles sur le site du ministère : https://www.education.gouv.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES externe de mathématiques : rapports de jury et programmes des épreuves*, documents disponibles sur le site officiel https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.