Leçon d'oral du CAPES

Dérivabilité

Fonctions réelles d'une variable réelle

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**
- 1.1 Prérequis . . . 2
- 1.2 Objectifs . . . 2

2 Taux d'accroissement et définition **2**
- 2.1 Taux d'accroissement . . . 2
- 2.2 Interprétation géométrique . . . 3

3 Dérivabilité et continuité **3**

4 Règles de dérivation **4**
- 4.1 Opérations sur les fonctions dérivables . . . 4
- 4.2 Dérivée d'une fonction composée . . . 4
- 4.3 Fonctions usuelles . . . 4

5 Dérivée et approximation locale **5**

6 Dérivées successives **5**

7 Théorèmes fondamentaux **5**
- 7.1 Théorème de Rolle . . . 5
- 7.2 Théorème des accroissements finis . . . 6
- 7.3 Conséquences . . . 6

8 Extrema et dérivée **6**
- 8.1 Méthode d'étude d'une fonction . . . 7

9 Contre-exemples et points de vigilance **7**

10 Liste d'exercices **7**
- 10.1 Exercice 1 : calcul à partir de la définition . . . 7
- 10.2 Exercice 2 : étude de la dérivabilité . . . 8
- 10.3 Exercice 3 : règles de dérivation . . . 8
- 10.4 Exercice 4 : tangente et approximation affine . . . 8
- 10.5 Exercice 5 : théorème de Rolle . . . 8
- 10.6 Exercice 6 : accroissements finis . . . 8
- 10.7 Exercice 7 : monotonie et extrema . . . 8
- 10.8 Exercice 8 : dérivée nulle et extremum . . . 8
- 10.9 Exercice 9 : dérivabilité et continuité de la dérivée . . . 9
- 10.10 Exercice 10 : application à une inégalité . . . 9

11 Références bibliographiques **9**

12 Conclusion **9**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose maîtrisées les notions suivantes :

— fonctions réelles d'une variable réelle et ensembles de définition ;

— limites de fonctions et opérations sur les limites ;

— continuité en un point et sur un intervalle ;

— calcul algébrique, factorisation et identités remarquables ;

— étude graphique des fonctions et équations de droites ;

— suites numériques et raisonnement par récurrence, pour certaines applications.

1.2 Objectifs

L'objectif est de comprendre la dérivabilité comme une propriété locale décrivant la variation d'une fonction au voisinage d'un point. Il s'agit de savoir relier le taux d'accroissement à la tangente à la courbe, d'établir les règles de dérivation, de comprendre les liens entre dérivabilité et continuité et d'utiliser les théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

La leçon doit également permettre d'identifier les situations où une fonction n'est pas dérivable, de justifier les calculs effectués et de mobiliser la dérivée dans des problèmes d'optimisation, de monotonie et d'approximation locale.

2 Taux d'accroissement et définition

2.1 Taux d'accroissement

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. Pour $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$, le taux d'accroissement de f entre a et $a + h$ est

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Il mesure la variation moyenne de la fonction entre les deux points d'abscisses a et $a + h$.

Lorsque h tend vers zéro, on étudie la limite de ce quotient. Si cette limite existe et est finie, elle décrit la variation instantanée de la fonction en a.

Définition 2.1 (Dérivabilité en un point)**.** Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur a de I si la limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

existe et est finie.

Cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et se note $f'(a)$.

On peut également écrire

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pour un point situé à une extrémité de l'intervalle, on considère la limite unilatérale correspondant au domaine de définition.

2.2 Interprétation géométrique

Le taux d'accroissement est le coefficient directeur de la droite sécante à la courbe passant par $A(a, f(a))$ et $M(a+h, f(a+h))$.

Lorsque h tend vers zéro et que la limite est finie, les sécantes admettent pour position limite la tangente à la courbe au point A.

L'équation de cette tangente est

$$\boxed{y = f(a) + f'(a)(x-a).}$$

Exemple 2.2. Pour $f(x) = x^2$, on a

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = 2a + h.$$

Par conséquent,

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}(2a+h) = 2a.$$

La fonction carré est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2x$.

3 Dérivabilité et continuité

Théorème 3.1 (La dérivabilité implique la continuité)**.** *Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.*

Démonstration. Pour $h \neq 0$, on écrit

$$f(a+h) - f(a) = h\,\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Lorsque $h \to 0$, le premier facteur tend vers zéro et le second vers le nombre fini $f'(a)$. Ainsi,

$$\lim_{h\to 0}\big(f(a+h) - f(a)\big) = 0.$$

Donc f est continue en a. □

Remarque 3.2. La réciproque est fausse. La continuité ne suffit pas à garantir la dérivabilité.

Exemple 3.3. La fonction $f(x) = |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$. En zéro, le taux d'accroissement vaut

$$\frac{|h|-0}{h} = \begin{cases} 1 & \text{si } h > 0, \\ -1 & \text{si } h < 0. \end{cases}$$

Les limites à droite et à gauche sont différentes. La fonction n'est donc pas dérivable en zéro.

Exemple 3.4. La fonction

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est continue en zéro car $\left|x^2 \sin(1/x)\right| \leq x^2$. Cependant, la dérivabilité en zéro doit être étudiée à partir du quotient différentiel, et non déduite de la seule continuité. On trouve

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = h\sin(1/h) \longrightarrow 0.$$

La fonction est donc dérivable en zéro, avec $f'(0) = 0$. Cet exemple montre que la continuité et la dérivabilité s'étudient à l'aide de limites distinctes.

4 Règles de dérivation

4.1 Opérations sur les fonctions dérivables

Théorème 4.1. *Soient f et g dérivables en a, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :*

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(a) &= \lambda f'(a),\\ (f+g)'(a) &= f'(a) + g'(a),\\ (fg)'(a) &= f'(a)g(a) + f(a)g'(a).\end{aligned}$$

Si $g(a) \neq 0$, le quotient f/g est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

La dérivation d'un produit ne consiste donc pas à dériver séparément les deux facteurs puis à les multiplier.

4.2 Dérivée d'une fonction composée

Théorème 4.2 (Règle de la chaîne)**.** *Soient f dérivable en a et g dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

En particulier, si u est dérivable, on obtient :

$$(u^n)' = nu^{n-1}u'$$

pour tout entier $n \geq 1$, ainsi que

$$(\exp u)' = u' \exp u, \qquad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

sur les domaines où ces expressions sont définies.

4.3 Fonctions usuelles

Les principales dérivées sont regroupées dans le tableau suivant.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \geq 1)$
$1/x$	$-1/x^2$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x}) \quad (x > 0)$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x \quad (x > 0)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$

La dérivabilité doit être vérifiée sur le domaine considéré. Par exemple, la fonction racine carrée est dérivable sur $]0, +\infty[$, mais elle ne l'est pas en zéro, bien qu'elle y soit continue sur $[0, +\infty[$.

5 Dérivée et approximation locale

Théorème 5.1 (Développement limité à l'ordre un)**.** *Une fonction f dérivable en a vérifie*

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + o(h) \qquad (h \to 0).$$

Cette relation signifie que l'écart entre la fonction et son approximation affine est négligeable devant $|h|$ lorsque h tend vers zéro.

On peut également écrire

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a) \qquad (x \to a).$$

La tangente fournit ainsi une approximation locale de la fonction. Cette propriété est à la base de nombreuses méthodes numériques, notamment les méthodes de résolution approchée d'équations.

Remarque 5.2. La dérivabilité en un point ne garantit pas l'existence d'une dérivée seconde en ce point. La régularité d'ordre supérieur constitue une hypothèse supplémentaire.

6 Dérivées successives

Définition 6.1. Si f est dérivable sur un intervalle I, sa dérivée est la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto f'(x)$.

Si f' est elle-même dérivable, on note $f'' = (f')'$ la dérivée seconde de f. Plus généralement, on définit les dérivées successives $f^{(n)}$ lorsque les dérivations correspondantes sont possibles.

La dérivée seconde intervient notamment dans l'étude de la convexité et dans la recherche de certains extrema.

Proposition 6.2. *Soit f deux fois dérivable sur un intervalle I.*

- *Si $f''(x) \geq 0$ sur I, alors f est convexe sur I.*
- *Si $f''(x) \leq 0$ sur I, alors f est concave sur I.*

La dérivée seconde n'est pas nécessaire pour étudier la monotonie : le signe de la dérivée première suffit.

7 Théorèmes fondamentaux

7.1 Théorème de Rolle

Théorème 7.1 (Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. La fonction continue f atteint un minimum et un maximum sur le segment $[a,b]$.

Si f est constante, toute valeur de $c \in]a,b[$ convient. Sinon, au moins l'un de ces extrema est atteint en un point intérieur c, puisque les valeurs aux extrémités sont égales. Au point intérieur où cet extremum est atteint, la dérivée est nulle. □

7.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 7.2 (Accroissements finis)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que*

$$\boxed{f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.}$$

Démonstration. Posons

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

La fonction φ est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. De plus, $\varphi(a) = \varphi(b)$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[$ tel que $\varphi'(c) = 0$. Or

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

On obtient donc le résultat annoncé. □

7.3 Conséquences

Corollaire 7.3 (Caractérisation de la monotonie)**.** *Soit f dérivable sur un intervalle I.*

- *Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante.*
- *Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante.*
- *Si $f' > 0$ sur I, alors f est strictement croissante.*
- *Si $f' < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante.*

La réciproque des deux premières implications est vraie lorsque f est dérivable : une fonction croissante a une dérivée positive ou nulle en tout point où elle est dérivable.

Corollaire 7.4 (Inégalité des accroissements finis)**.** *Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et si $|f'(x)| \leq M$ pour tout $x \in]a, b[$, alors*

$$|f(b) - f(a)| \leq M\,|b - a|\,.$$

Cette inégalité fournit un contrôle de la variation de la fonction et intervient dans l'étude des suites, des équations différentielles et des approximations numériques.

8 Extrema et dérivée

Théorème 8.1 (Condition nécessaire d'extremum local)**.** *Si f est dérivable en un point intérieur a et si f présente en a un extremum local, alors*

$$f'(a) = 0.$$

Démonstration. Supposons que a soit un maximum local. Pour h suffisamment petit, on a

$$f(a + h) - f(a) \leq 0.$$

Le quotient différentiel est donc négatif ou nul pour $h > 0$ et positif ou nul pour $h < 0$.

Puisque la limite de ce quotient existe, elle est à la fois positive ou nulle et négative ou nulle. Elle est donc nulle. Le cas d'un minimum local se traite de manière analogue. □

Remarque 8.2. La condition $f'(a) = 0$ n'est pas suffisante pour conclure à l'existence d'un extremum local. Par exemple, pour $f(x) = x^3$, on a $f'(0) = 0$, mais la fonction est strictement croissante au voisinage de zéro.

8.1 Méthode d'étude d'une fonction

Pour étudier les variations d'une fonction dérivable, on peut suivre la démarche suivante :

1. déterminer le domaine de définition ;
2. calculer la dérivée sur les intervalles concernés ;
3. factoriser ou simplifier l'expression de la dérivée ;
4. étudier le signe de la dérivée ;
5. dresser le tableau de variations ;
6. rechercher les extrema éventuels et interpréter les résultats.

9 Contre-exemples et points de vigilance

— Une fonction continue n'est pas nécessairement dérivable : $f(x) = |x|$ en zéro.

— Une dérivée nulle en un point ne garantit pas un extremum : $f(x) = x^3$ en zéro.

— La dérivabilité en un point n'implique pas la continuité de la dérivée dans un voisinage de ce point.

— Le théorème des accroissements finis exige la continuité sur le segment fermé et la dérivabilité à l'intérieur.

— La formule de dérivation d'un quotient exige que le dénominateur soit non nul au point considéré.

— La règle de dérivation d'une composée impose de vérifier les hypothèses de dérivabilité des deux fonctions.

Un exemple important de fonction dérivable dont la dérivée n'est pas continue en zéro est

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

En effet, $f'(0) = 0$, tandis que, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x \sin(1/x^2) - \frac{2}{x} \cos(1/x^2).$$

La dérivée n'est pas bornée au voisinage de zéro et n'y est donc pas continue.

10 Liste d'exercices

Les exercices suivants permettent de mobiliser progressivement les définitions, les calculs de dérivées et les théorèmes.

10.1 Exercice 1 : calcul à partir de la définition

Soit $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

1. Calculer le taux d'accroissement entre a et $a + h$.
2. En déduire $f'(a)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

10.2 Exercice 2 : étude de la dérivabilité

Étudier la continuité et la dérivabilité en zéro des fonctions suivantes :

$$f(x) = |x|\,, \qquad g(x) = x\,|x|\,, \qquad h(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pour chaque fonction, justifier les conclusions à l'aide de limites.

10.3 Exercice 3 : règles de dérivation

Calculer les dérivées et préciser les domaines de dérivabilité :

$$f(x) = (x^2+1)e^x, \qquad g(x) = \frac{\ln x}{x}, \qquad h(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

Simplifier les expressions obtenues lorsque cela est possible.

10.4 Exercice 4 : tangente et approximation affine

Soit $f(x) = \ln(1+x)$.

1. Déterminer l'équation de la tangente en zéro.
2. Établir l'approximation de $f(x)$ au voisinage de zéro à l'ordre un.
3. Utiliser cette approximation pour estimer $\ln(1,02)$.
4. Expliquer pourquoi cette estimation est pertinente lorsque x est proche de zéro.

10.5 Exercice 5 : théorème de Rolle

Soit $f(x) = x^2 - 4x + 3$ sur $[1,3]$.

1. Vérifier les hypothèses du théorème de Rolle.
2. Déterminer les points où la dérivée s'annule.
3. Interpréter géométriquement le résultat.

10.6 Exercice 6 : accroissements finis

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $[1,4]$.

1. Vérifier les hypothèses du théorème des accroissements finis.
2. Déterminer un réel $c \in]1,4[$ vérifiant la conclusion.
3. Retrouver une majoration de la variation de f sur $[1,4]$ à l'aide de la borne de sa dérivée.

10.7 Exercice 7 : monotonie et extrema

Étudier les variations de

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

Déterminer les extrema locaux éventuels et dresser le tableau de variations.

10.8 Exercice 8 : dérivée nulle et extremum

Construire deux exemples de fonctions dérivables en zéro telles que $f'(0) = 0$:

1. une fonction présentant un extremum local en zéro ;
2. une fonction ne présentant aucun extremum local en zéro.

Expliquer pourquoi ces exemples montrent que la condition $f'(0) = 0$ n'est pas suffisante.

10.9 Exercice 9 : dérivabilité et continuité de la dérivée

Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est dérivable en zéro.
2. Calculer $f'(x)$ pour $x \neq 0$.
3. Étudier la continuité de f' en zéro.

10.10 Exercice 10 : application à une inégalité

À l'aide du théorème des accroissements finis, démontrer que pour tout $x \geq 0$,

$$|\sin x - \sin 0| \leq x.$$

Préciser le rôle de la borne de la dérivée de la fonction sinus.

11 Références bibliographiques

Les références suivantes constituent des points d'appui pour la préparation de cette leçon et l'approfondissement des notions abordées.

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses, 1994. Ouvrage de référence pour les limites, la dérivabilité et les théorèmes fondamentaux de l'analyse.

[2] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Cours et exercices consacrés notamment aux fonctions d'une variable réelle et aux théorèmes de dérivation.

[3] Hervé Queffélec et Claude Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod. Référence pour une présentation théorique plus approfondie des notions d'analyse.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Les programmes en vigueur permettent de situer les notions de dérivation et leurs applications dans les apprentissages du secondaire.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*, sessions récentes. Ces rapports permettent de préciser les attentes de l'épreuve orale, la rigueur des démonstrations et la place des exemples et contre-exemples.

12 Conclusion

La dérivabilité constitue une notion centrale de l'analyse. Définie par une limite du taux d'accroissement, elle possède une interprétation géométrique par la tangente et une interprétation analytique par l'approximation affine locale.

Les règles de dérivation permettent les calculs, tandis que les théorèmes de Rolle et des accroissements finis établissent des liens fondamentaux entre variation globale et comportement local. Leurs applications à la monotonie, aux extrema et aux inégalités illustrent l'importance de la dérivabilité dans l'étude des fonctions.

Pour une présentation orale, il convient de distinguer soigneusement les définitions, les résultats admis ou démontrés, les hypothèses de chaque théorème et les contre-exemples qui montrent la nécessité de ces hypothèses.