Fonctions polynômes du second degré

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Introduction **2**

2 Prérequis et objectifs **2**
2.1 Prérequis . . . 2
2.2 Objectifs de la leçon . . . 2

3 Définition et différentes formes **2**
3.1 Forme développée . . . 3
3.2 Forme canonique . . . 3
3.3 Forme factorisée . . . 3

4 Discriminant et résolution de l'équation **3**
4.1 Définition du discriminant . . . 3
4.2 Théorème de résolution . . . 4
4.3 Relations entre les racines et les coefficients . . . 4

5 Signe d'un polynôme du second degré **4**
5.1 Cas où le discriminant est strictement positif . . . 4
5.2 Cas où le discriminant est nul . . . 5
5.3 Cas où le discriminant est négatif . . . 5
5.4 Exemple . . . 5

6 Variations et extremum **5**
6.1 Étude à partir de la forme canonique . . . 5
6.2 Étude à l'aide de la dérivée . . . 6

7 Représentation graphique **6**
7.1 La parabole . . . 6
7.2 Influence des coefficients . . . 6
7.3 Symétrie . . . 6

8 Applications aux équations et inéquations **6**
8.1 Résolution d'une équation . . . 6
8.2 Résolution d'une inéquation . . . 7

9 Problèmes d'optimisation **7**
9.1 Exemple : aire d'un rectangle . . . 7
9.2 Démarche de modélisation . . . 7

10 Exercices proposés **7**
10.1 Éléments de correction . . . 9

11 Points de vigilance pour l'oral du CAPES **9**

12 Conclusion **10**

1 Introduction

Les fonctions polynômes du second degré occupent une place importante dans l'étude des fonctions réelles. Elles permettent de relier plusieurs notions fondamentales : calcul algébrique, équations et inéquations, représentation graphique, variations et optimisation.

Elles constituent également un modèle mathématique pertinent pour de nombreuses situations concrètes, notamment lorsque l'on étudie des trajectoires idéalisées, des problèmes d'aire ou la recherche d'un maximum ou d'un minimum.

L'objectif de cette leçon est de présenter les différentes formes d'un polynôme du second degré, d'établir les résultats fondamentaux relatifs à ses racines et à ses variations, puis de montrer comment ces résultats interviennent dans la résolution de problèmes.

2 Prérequis et objectifs

2.1 Prérequis

Les connaissances suivantes sont nécessaires :

— calcul littéral et développement d'expressions ;
— identités remarquables et factorisation ;
— résolution d'équations du premier degré ;
— résolution d'équations du second degré dans des cas simples ;
— ordre sur $\mathbb{R}$, intervalles et inégalités ;
— lecture d'un graphique et étude des variations ;
— coordonnées dans le plan et équation d'une droite.

2.2 Objectifs de la leçon

À l'issue de la leçon, on doit pouvoir :

— définir une fonction polynôme du second degré ;
— passer de la forme développée à la forme canonique ;
— déterminer les racines à l'aide du discriminant ;
— factoriser le polynôme lorsque cela est possible sur $\mathbb{R}$;
— déterminer le signe du polynôme ;
— étudier les variations de la fonction ;
— construire et interpréter sa représentation graphique ;
— résoudre des équations et des inéquations ;
— utiliser ces résultats dans des problèmes d'optimisation.

3 Définition et différentes formes

Définition 3.1. Une fonction polynôme du second degré est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

Le réel a est le coefficient dominant, b le coefficient du terme de degré un et c le terme constant.

3.1 Forme développée

La forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

est particulièrement adaptée au calcul du discriminant et à l'identification des coefficients.

3.2 Forme canonique

Proposition 3.1. *Tout polynôme du second degré s'écrit sous la forme*

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

où

$$\alpha = -\frac{b}{2a}, \qquad \beta = -\frac{\Delta}{4a}, \qquad \Delta = b^2 - 4ac.$$

Démonstration. On complète le carré :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}.$$

□

Remarque 3.1. La forme canonique est adaptée à l'étude des variations et à la détermination du sommet de la parabole.

3.3 Forme factorisée

Lorsque le polynôme possède des racines réelles x_1 et x_2, on peut écrire

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Dans le cas d'une racine double x_0, on obtient

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

La forme factorisée est particulièrement utile pour étudier le signe du polynôme.

4 Discriminant et résolution de l'équation

On considère l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a \neq 0.$$

4.1 Définition du discriminant

On appelle discriminant du polynôme

$$\boxed{\Delta = b^2 - 4ac.}$$

4.2 Théorème de résolution

Théorème 4.1. *Le nombre de solutions réelles de l'équation dépend du signe de Δ.*

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions réelles distinctes :*
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution réelle, dite racine double :*
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
3. *Si $\Delta < 0$, l'équation ne possède aucune solution réelle.*

Démonstration. La forme canonique donne
$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}.$$
En divisant par a et en utilisant la forme canonique
$$a(x-\alpha)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0,$$
on obtient
$$(x-\alpha)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$
Le membre de gauche est positif ou nul. Il y a donc deux solutions lorsque $\Delta > 0$, une lorsque $\Delta = 0$ et aucune lorsque $\Delta < 0$. Les formules annoncées s'en déduisent. □

4.3 Relations entre les racines et les coefficients

Proposition 4.1 (Relations de Viète)**.** *Si $\Delta \geq 0$, en comptant deux fois la racine double, les racines x_1, x_2 vérifient*
$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}, \qquad \boxed{x_1 x_2 = \frac{c}{a}}.$$

Démonstration. Dans le cas de deux racines réelles,
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$
Le développement et l'identification des coefficients donnent les deux relations. Le cas d'une racine double se traite de la même manière. □

Remarque 4.1. Les relations de Viète permettent notamment de vérifier des racines calculées ou de déterminer un polynôme à partir de ses racines et de son coefficient dominant.

5 Signe d'un polynôme du second degré

5.1 Cas où le discriminant est strictement positif

Proposition 5.1. *Si $\Delta > 0$ et si $x_1 < x_2$ sont les deux racines, alors*
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$
Le signe de f est celui de a à l'extérieur de $[x_1, x_2]$ et le signe opposé à l'intérieur de cet intervalle.

Autrement dit :

— si $a > 0$, le polynôme est positif à l'extérieur des racines et négatif entre elles ;

— si $a < 0$, le polynôme est négatif à l'extérieur des racines et positif entre elles.

5.2 Cas où le discriminant est nul

Si $\Delta = 0$, on a

$$f(x) = a(x - x_0)^2.$$

Le polynôme a donc le signe de a pour tout $x \neq x_0$ et s'annule en x_0.

5.3 Cas où le discriminant est négatif

Si $\Delta < 0$, le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Par continuité, son signe est constant. Il est celui de a.

Corollaire 5.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

— *si $\Delta < 0$ et $a > 0$, alors $f(x) > 0$;*

— *si $\Delta < 0$ et $a < 0$, alors $f(x) < 0$.*

5.4 Exemple

Étudions le signe de

$$f(x) = 2x^2 - 6x + 4.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 4 = 4.$$

Les racines sont

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = 2.$$

Ainsi,

$$f(x) = 2(x - 1)(x - 2).$$

Le coefficient dominant étant positif, le tableau de signe est :

x	$-\infty$		1		2	$+\infty$
$x-1$	$-$		0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$		$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$

On en déduit, par exemple,

$$f(x) \leq 0 \iff x \in [1, 2].$$

6 Variations et extremum

6.1 Étude à partir de la forme canonique

Écrivons

$$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \qquad \alpha = -\frac{b}{2a}.$$

Comme $(x - \alpha)^2$ décroît sur $]-\infty, \alpha]$ puis croît sur $[\alpha, +\infty[$, les variations de f dépendent du signe de a.

Théorème 6.1.

— *Si $a > 0$, la fonction est décroissante sur $]-\infty, \alpha]$, puis croissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet un minimum égal à β en $x = \alpha$.*

— *Si $a < 0$, la fonction est croissante sur $]-\infty, \alpha]$, puis décroissante sur $[\alpha, +\infty[$. Elle admet un maximum égal à β en $x = \alpha$.*

Le sommet de la parabole représentative est donc

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right).}$$

6.2 Étude à l'aide de la dérivée

La dérivée de f est

$$f'(x) = 2ax + b.$$

Elle s'annule en

$$x = -\frac{b}{2a} = \alpha.$$

Son signe est celui de a à droite de α et le signe opposé à gauche. On retrouve ainsi les variations précédentes.

Remarque 6.1. La méthode par la forme canonique ne nécessite pas le calcul de la dérivée. Elle convient notamment à une présentation au niveau du lycée. La méthode par dérivation met en évidence le lien entre étude des variations et calcul différentiel.

7 Représentation graphique

7.1 La parabole

La représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré est une parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ses principales caractéristiques sont :

— son sommet est $S\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$;

— son axe de symétrie a pour équation

$$x = -\frac{b}{2a};$$

— elle est tournée vers le haut si $a > 0$;

— elle est tournée vers le bas si $a < 0$;

— ses intersections avec l'axe des abscisses sont déterminées par les racines réelles ;

— son intersection avec l'axe des ordonnées est le point $(0, c)$.

7.2 Influence des coefficients

Le coefficient a détermine le sens d'ouverture et l'aplatissement relatif de la parabole :

— si $|a|$ augmente, la parabole devient plus resserrée ;

— si $|a|$ diminue, elle devient plus large ;

— le coefficient c donne l'ordonnée à l'origine ;

— les trois coefficients déterminent la position du sommet et les éventuelles racines.

7.3 Symétrie

Pour tout $h \in \mathbb{R}$,

$$f(\alpha + h) = ah^2 + \beta = f(\alpha - h).$$

La courbe est donc symétrique par rapport à la droite $x = \alpha$.

8 Applications aux équations et inéquations

8.1 Résolution d'une équation

Résoudre une équation du second degré revient à déterminer les racines du polynôme associé. Le discriminant permet de distinguer les trois situations possibles.

8.2 Résolution d'une inéquation

Pour résoudre

$$ax^2 + bx + c \geq 0,$$

on détermine d'abord le discriminant, puis les racines éventuelles et enfin le signe du polynôme.

Exemple 8.1. Résolvons

$$-x^2 + 5x - 6 \geq 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 25 - 24 = 1.$$

Les racines sont 2 et 3. Comme le coefficient dominant est négatif, le polynôme est positif entre les racines. L'ensemble des solutions est donc

$$\boxed{[2, 3].}$$

9 Problèmes d'optimisation

Les fonctions polynômes du second degré apparaissent fréquemment dans les problèmes où une grandeur dépend quadratiquement d'une variable.

9.1 Exemple : aire d'un rectangle

On dispose d'un rectangle dont le périmètre est fixé à 20 unités. Si ses côtés ont pour longueurs x et $10 - x$, son aire vaut

$$A(x) = x(10 - x) = -x^2 + 10x.$$

Les contraintes géométriques donnent $0 < x < 10$.

La forme canonique est

$$A(x) = -(x - 5)^2 + 25.$$

L'aire maximale est donc 25 unités d'aire, obtenue pour $x = 5$. Le rectangle est alors un carré.

9.2 Démarche de modélisation

Une résolution rigoureuse d'un problème d'optimisation comprend :

1. le choix de la variable ;
2. la détermination de son domaine admissible ;
3. l'expression de la grandeur à optimiser ;
4. la mise sous forme canonique ou l'étude des variations ;
5. l'interprétation du résultat dans le contexte initial.

Il est essentiel de tenir compte du domaine admissible : le sommet de la parabole ne constitue pas nécessairement un extremum admissible si la variable est soumise à des contraintes supplémentaires.

10 Exercices proposés

Les exercices suivants permettent de vérifier les connaissances algébriques, graphiques et fonctionnelles.

Exercice 10.1 (Forme canonique)**.** Mettre sous forme canonique les polynômes :

$$f(x) = 2x^2 - 8x + 3, \qquad g(x) = -3x^2 + 6x + 1.$$

Déterminer le sommet et l'axe de symétrie de chaque parabole. Préciser le maximum ou le minimum éventuel.

Exercice 10.2 (Discriminant et racines)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$2x^2 - 3x - 2 = 0,$$
$$x^2 - 4x + 4 = 0,$$
$$3x^2 + 2x + 5 = 0.$$

Dans chaque cas, interpréter le résultat graphiquement.

Exercice 10.3 (Relations de Viète)**.** Un polynôme du second degré unitaire possède pour racines -2 et 5. Déterminer ce polynôme. Vérifier le résultat en utilisant la somme et le produit des racines.

Exercice 10.4 (Signe et inéquation)**.** Étudier le signe de

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

sur $\mathbb{R}$, puis résoudre

$$3x^2 - 12x + 9 \leq 0.$$

Présenter un tableau de signes complet.

Exercice 10.5 (Paramètre)**.** Discuter, suivant le réel m, le nombre de solutions réelles de l'équation

$$x^2 - 2mx + m + 2 = 0.$$

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation possède une racine double.

Exercice 10.6 (Intersection de courbes)**.** Déterminer les points d'intersection de la parabole

$$y = x^2 - 3x + 1$$

et de la droite

$$y = 2x - 3.$$

Interpréter le nombre de points d'intersection à l'aide d'une équation du second degré.

Exercice 10.7 (Optimisation géométrique)**.** Un rectangle a un périmètre de 32 cm. Exprimer son aire en fonction de la longueur x d'un côté, déterminer le domaine admissible et rechercher l'aire maximale. Interpréter le résultat géométriquement.

Exercice 10.8 (Problème de modélisation)**.** La hauteur, en mètres, d'un objet lancé verticalement est modélisée par

$$h(t) = -5t^2 + 20t + 1,$$

où t est le temps en secondes et $t \geq 0$. Déterminer le temps auquel la hauteur est maximale, cette hauteur, puis le temps auquel l'objet atteint le sol, si ce temps existe.

10.1 Éléments de correction

1. $$f(x) = 2(x-2)^2 - 5, \qquad g(x) = -3(x-1)^2 + 4.$$
   Le premier polynôme admet un minimum égal à -5 ; le second admet un maximum égal à 4.
2. Pour la première équation, les racines sont $-1/2$ et 2. Pour la deuxième, la racine double est 2. La troisième équation n'a pas de solution réelle car son discriminant est négatif.
3. Le polynôme est
   $$P(x) = (x+2)(x-5) = x^2 - 3x - 10.$$
4. On a
   $$f(x) = 3(x-1)(x-3).$$
   L'inéquation est vérifiée pour $x \in [1, 3]$.
5. Le discriminant est
   $$\Delta = 4m^2 - 4(m+2) = 4(m^2 - m - 2) = 4(m-2)(m+1).$$
   Il est positif ou nul lorsque $m \leq -1$ ou $m \geq 2$. La racine est double pour $m = -1$ ou $m = 2$.
6. L'équation d'intersection est
   $$x^2 - 5x + 4 = 0,$$
   dont les racines sont 1 et 4. Les points sont $(1, -1)$ et $(4, 5)$.
7. L'aire est
   $$A(x) = x(16 - x) = -(x-8)^2 + 64, \qquad 0 < x < 16.$$
   L'aire maximale vaut $64\,\text{cm}^2$ pour $x = 8$. Le rectangle est un carré.
8. La forme canonique est
   $$h(t) = -5(t-2)^2 + 21.$$
   La hauteur maximale vaut 21 m au bout de 2 s. L'objet atteint le sol lorsque
   $$-5t^2 + 20t + 1 = 0.$$
   La solution positive est
   $$t = 2 + \frac{\sqrt{105}}{5}.$$

11 Points de vigilance pour l'oral du CAPES

Les points suivants méritent une attention particulière :

— distinguer les trois formes du polynôme et préciser l'intérêt de chacune ;
— justifier les formules du discriminant et du sommet ;
— ne pas confondre racine double et deux racines distinctes ;
— inclure les racines dans les ensembles de solutions lorsque l'inégalité est large ;
— tenir compte du signe du coefficient dominant ;
— vérifier le domaine de définition et les contraintes dans les problèmes concrets ;
— articuler les approches algébrique, graphique et fonctionnelle ;
— adapter les démonstrations au niveau des élèves et aux attendus du programme concerné.

Une présentation efficace peut partir de la forme développée, introduire la forme canonique par complétion du carré, étudier ensuite les racines et le signe, puis conclure par les variations, la représentation graphique et une application d'optimisation.

12 Conclusion

L'étude des fonctions polynômes du second degré met en évidence l'articulation entre calcul algébrique, équations, inéquations, fonctions et géométrie.

La forme développée facilite les calculs de coefficients, la forme canonique révèle le sommet et les variations, tandis que la forme factorisée permet une étude immédiate du signe. Le discriminant relie ces différentes approches.

Ces outils sont essentiels tant pour la résolution d'exercices algébriques que pour la modélisation et l'optimisation de situations concrètes.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletins officiels de l'Éducation nationale. https://www.education.gouv.fr/

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques au lycée*. Éduscol. https://eduscol.education.fr/

[3] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES : programmes, sujets et rapports de jury de mathématiques*. Site officiel devenir enseignant. https://www.devenirenseignant.gouv.fr/

[4] Stéphane Balac et Laurent Masmoudi, *Mathématiques : analyse et algèbre*. Référence générale pour les méthodes algébriques et l'étude des fonctions.