Fonctions logarithmes

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Définition et construction du logarithme népérien **2**
- 2.1 Définition par la fonction réciproque . . . 2
- 2.2 Interprétation graphique . . . 2
- 2.3 Une caractérisation intégrale . . . 3

3 Propriétés algébriques **3**
- 3.1 Relation fonctionnelle . . . 3
- 3.2 Conséquences . . . 3
- 3.3 Logarithme en base quelconque . . . 4

4 Étude analytique de la fonction logarithme **4**
- 4.1 Domaine, continuité et dérivabilité . . . 4
- 4.2 Limites . . . 4
- 4.3 Tableau de variations . . . 4
- 4.4 Convexité . . . 5

5 Équations et inéquations logarithmiques **5**
- 5.1 Équations élémentaires . . . 5
- 5.2 Inéquations . . . 5
- 5.3 Équations faisant intervenir plusieurs logarithmes . . . 5

6 Dérivation et étude de fonctions **6**
- 6.1 Dérivée d'une composée . . . 6
- 6.2 Exemple d'étude complète . . . 6
- 6.3 Dérivation logarithmique . . . 6

7 Comparaison des croissances **7**

8 Applications **7**
- 8.1 Résolution d'équations exponentielles . . . 7
- 8.2 Modélisation d'une croissance exponentielle . . . 7
- 8.3 Échelle logarithmique . . . 8

9 Exercices proposés **8**

10 Points de vigilance pour l'oral **9**

11 Conclusion **10**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis

La compréhension de cette leçon suppose de maîtriser :

— les propriétés algébriques des fonctions et des équations ;
— la notion de fonction réciproque et les conditions d'existence d'une fonction réciproque ;
— les limites de fonctions, notamment les limites en 0^+ et en $+\infty$;
— la continuité, la dérivabilité et les théorèmes fondamentaux associés ;
— les règles de dérivation et l'étude des variations ;
— les propriétés de la fonction exponentielle.

Objectifs

Cette leçon vise à :

— définir la fonction logarithme népérien comme réciproque de la fonction exponentielle ;
— établir ses propriétés algébriques et analytiques ;
— étudier ses limites, sa dérivée et ses variations ;
— résoudre des équations et des inéquations faisant intervenir des logarithmes ;
— exploiter le logarithme dans l'étude de fonctions, la résolution de problèmes et la comparaison de croissances ;
— mettre en évidence les liens entre logarithme, exponentielle, intégration et modélisation.

Positionnement dans les programmes

Le logarithme népérien intervient dans l'étude des fonctions au lycée, notamment en terminale générale, puis dans l'enseignement supérieur. Cette leçon articule les approches algébrique, analytique et fonctionnelle. Pour l'oral du CAPES, il convient de distinguer les résultats accessibles au lycée des démonstrations plus approfondies mobilisant les outils d'analyse de niveau licence.

2 Définition et construction du logarithme népérien

2.1 Définition par la fonction réciproque

Définition 2.1. La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa fonction réciproque est appelée *fonction logarithme népérien* et est notée ln :

$$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Pour tout $x > 0$, $\ln(x)$ est l'unique réel y tel que $\mathrm{e}^y = x$.

Propriété 2.2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, et tout $y > 0$, on a :

$$\ln(\mathrm{e}^x) = x, \qquad \mathrm{e}^{\ln(y)} = y.$$

En particulier,

$$\ln(1) = 0, \qquad \ln(\mathrm{e}) = 1.$$

2.2 Interprétation graphique

Les courbes représentatives de exp et de ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$, puisque ces fonctions sont réciproques l'une de l'autre.

La fonction ln est définie uniquement sur $\mathbb{R}_+^*$. Sa courbe passe par le point $(1, 0)$, est strictement croissante et admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

2.3 Une caractérisation intégrale

Une autre construction consiste à définir, pour $x > 0$,

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Cette définition permet de retrouver directement la dérivée du logarithme grâce au théorème fondamental de l'analyse. Elle permet également d'établir les propriétés algébriques du logarithme à partir de changements de variable.

Propriété 2.3. Pour tout $x > 0$,

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Dans une présentation rigoureuse, on choisit une construction initiale : soit la fonction réciproque de l'exponentielle, soit la fonction définie par l'intégrale. On démontre ensuite l'équivalence des deux approches, plutôt que de les poser indépendamment.

3 Propriétés algébriques

3.1 Relation fonctionnelle

Théorème 3.1. Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\boxed{\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).}$$

Démonstration. On utilise la relation $\mathrm{e}^{\ln(a)} = a$ et la propriété $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \mathrm{e}^v$. Ainsi,

$$ab = \mathrm{e}^{\ln(a)}\mathrm{e}^{\ln(b)} = \mathrm{e}^{\ln(a)+\ln(b)}.$$

Par injectivité de l'exponentielle,

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

□

3.2 Conséquences

Pour tous $a, b > 0$ et tout $r \in \mathbb{R}$:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b),$$

$$\ln(a^r) = r\ln(a),$$

$$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a), \qquad \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a).$$

Ces formules permettent notamment de transformer des produits en sommes et des puissances en produits.

Remarque 3.2. La formule

$$\ln(a+b) = \ln(a) + \ln(b)$$

est fausse en général. La relation fonctionnelle fondamentale concerne les produits, et non les sommes.

3.3 Logarithme en base quelconque

Soit $a > 0$, avec $a \neq 1$. Pour $x > 0$, on définit le logarithme en base a par

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

On obtient notamment :

$$\log_a(a) = 1, \qquad \log_a(1) = 0, \qquad a^{\log_a(x)} = x.$$

La fonction $\log_a$ est croissante lorsque $a > 1$ et décroissante lorsque $0 < a < 1$.
Le logarithme décimal correspond à la base 10 :

$$\log_{10}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

4 Étude analytique de la fonction logarithme

4.1 Domaine, continuité et dérivabilité

La fonction ln est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est dérivable sur cet intervalle et

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}.}$$

Puisque $1/x > 0$ pour tout $x > 0$, la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

4.2 Limites

Les limites fondamentales sont :

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty}$$

et

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.}$$

La première montre que la droite $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de ln.

On dispose également de la limite classique :

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.}$$

Ainsi, le logarithme croît moins vite que la fonction linéaire à l'infini.

4.3 Tableau de variations

x	0^+		$+\infty$
$\ln'(x)$	$+$		
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction ln réalise donc une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

4.4 Convexité

La dérivée seconde est

$$\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \qquad (x > 0).$$

La fonction logarithme est donc strictement concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

En particulier, sa courbe est située sous chacune de ses tangentes. Au point d'abscisse 1, l'équation de la tangente est

$$y = x - 1.$$

On obtient ainsi l'inégalité fondamentale :

$$\boxed{\ln(x) \leq x - 1 \qquad (x > 0),}$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Cette inégalité est utile pour établir des comparaisons, des inégalités et certaines limites.

5 Équations et inéquations logarithmiques

5.1 Équations élémentaires

La stricte croissance et l'injectivité de ln donnent, pour $a, b > 0$:

$$\ln(a) = \ln(b) \iff a = b.$$

De même, pour tout réel c,

$$\ln(x) = c \iff x = \mathrm{e}^c.$$

Il faut toujours commencer par vérifier que l'argument du logarithme est strictement positif.

5.2 Inéquations

Pour $a, b > 0$,

$$\ln(a) < \ln(b) \iff a < b.$$

Par exemple, résoudre

$$\ln(2x - 1) \leq 0$$

revient à imposer d'abord $2x - 1 > 0$, puis à utiliser la croissance de ln :

$$0 < 2x - 1 \leq 1.$$

Par conséquent,

$$\boxed{x \in \left]\frac{1}{2}, 1\right].}$$

5.3 Équations faisant intervenir plusieurs logarithmes

Considérons l'équation

$$\ln(x - 1) + \ln(x + 1) = \ln(8).$$

Le domaine de définition impose $x > 1$. La propriété du logarithme d'un produit donne

$$\ln\big((x - 1)(x + 1)\big) = \ln(8).$$

Par injectivité,

$$x^2 - 1 = 8.$$

Les solutions de cette équation sont $x = \pm 3$, mais seule la valeur $x = 3$ appartient au domaine initial. L'ensemble des solutions est donc $\{3\}$.

6 Dérivation et étude de fonctions

6.1 Dérivée d'une composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, à valeurs strictement positives. Alors

$$\boxed{(\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.}$$

Cette formule est centrale dans les études de fonctions et les calculs d'intégrales.

6.2 Exemple d'étude complète

Étudions la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}, \qquad x > 0.$$

Sa dérivée est

$$f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

Comme $x^2 > 0$, le signe de $f'(x)$ est celui de $1 - \ln(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\iff x < \mathrm{e}, \\ f'(x) = 0 &\iff x = \mathrm{e}, \\ f'(x) < 0 &\iff x > \mathrm{e}. \end{aligned}$$

La fonction est donc croissante sur $]0, \mathrm{e}]$, puis décroissante sur $[\mathrm{e}, +\infty[$. Elle atteint son maximum global en $x = \mathrm{e}$:

$$f(\mathrm{e}) = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Les limites aux bornes sont

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$

6.3 Dérivation logarithmique

Lorsque u est une fonction dérivable strictement positive, on peut dériver $\ln(u)$ pour calculer la dérivée de fonctions faisant intervenir des produits ou des puissances.

Par exemple, pour

$$f(x) = x^x, \qquad x > 0,$$

on écrit

$$\ln(f(x)) = x \ln(x).$$

En dérivant,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x) + 1.$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(x) = x^x \big(\ln(x) + 1 \big).}$$

Cette méthode est appelée dérivation logarithmique.

7 Comparaison des croissances

Le logarithme est une fonction qui croît vers $+\infty$, mais moins vite que toute puissance strictement positive.

Pour tout $\alpha > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.}$$

Plus généralement, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0.$$

Ces résultats permettent de lever certaines formes indéterminées et de comparer des fonctions à l'infini.

On peut également étudier les suites

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}, \qquad n \geq 1,$$

et montrer que $u_n \to 0$ pour tout $\alpha > 0$.

8 Applications

8.1 Résolution d'équations exponentielles

Pour résoudre une équation de la forme

$$\mathrm{e}^{u(x)} = A, \qquad A > 0,$$

on peut appliquer le logarithme :

$$u(x) = \ln(A).$$

Par exemple,

$$\mathrm{e}^{2x-1} = 5 \iff 2x - 1 = \ln(5) \iff x = \frac{1 + \ln(5)}{2}.$$

8.2 Modélisation d'une croissance exponentielle

Considérons un modèle

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{kt}, \qquad N_0 > 0.$$

En prenant le logarithme,

$$\ln(N(t)) = \ln(N_0) + kt.$$

Le logarithme transforme donc une croissance exponentielle en une relation affine en t. Lorsque $k > 0$, le temps nécessaire pour atteindre un seuil $N_1 > 0$ est, si $N_1 \geq N_0$,

$$t = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{N_1}{N_0}\right).$$

Cette formule intervient dans les modèles de population, de capitalisation et de phénomènes physiques.

8.3 Échelle logarithmique

Le logarithme décimal est utilisé pour construire des échelles adaptées à des grandeurs couvrant plusieurs ordres de grandeur. Par exemple, une échelle de type

$$L = 10 \log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

intervient en acoustique et en électronique, lorsque P/P_0 est un rapport de puissances positif.

Il convient de préciser les unités, la grandeur mesurée et la convention employée dans chaque application.

9 Exercices proposés

Les exercices suivants peuvent être utilisés pour illustrer les principales notions de la leçon. Certains conviennent à une présentation au lycée ; les derniers mobilisent des techniques de niveau licence.

Exercice 1 (Propriétés algébriques)**.** Simplifier, en précisant les conditions d'existence :

$$A = \ln(12) - \ln(3), \qquad B = 2\ln(5) + \ln(4) - \ln(10).$$

Résoudre ensuite

$$\ln(x) + \ln(x-2) = \ln(3).$$

Exercice 2 (Équations et inéquations)**.** Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$\ln(3x+1) = \ln(7-x),$$

puis

$$\ln(x-1) \geq 0.$$

Dans chaque cas, déterminer le domaine de définition avant de résoudre l'équation ou l'inéquation.

Exercice 3 (Limites)**.** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x), \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}},$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Justifier les méthodes utilisées.

Exercice 4 (Étude de fonction)**.** On considère

$$f(x) = x - \ln(x), \qquad x > 0.$$

a) Calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) Déterminer son minimum.

d) En déduire une inégalité entre x et $\ln(x)$.

Exercice 5 (Fonction logarithmique composée)**.** Étudier les variations de

$$f(x) = \ln(x^2+1) - x.$$

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$, puis discuter le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Exercice 6 (Dérivation logarithmique)**.** Pour $x > 0$, on pose

$$f(x) = \frac{x^3\sqrt{x+1}}{\mathrm{e}^x}.$$

Calculer $f'(x)$ en utilisant la dérivation logarithmique. Comparer cette méthode à une dérivation directe.

Exercice 7 (Comparaison de croissances)**.** Soit $\alpha > 0$. Démontrer que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0.$$

En déduire la limite de

$$u_n = \frac{\ln(n)}{n^\alpha}.$$

Exercice 8 (Modélisation)**.** Une population suit le modèle

$$N(t) = 500\mathrm{e}^{0.03t},$$

où t est exprimé en années.

a) Calculer la population prévue après dix ans.

b) Déterminer le temps nécessaire pour que la population double.

c) Expliquer le rôle du logarithme dans le calcul du temps de doublement.

Exercice 9 (Approfondissement : inégalité logarithmique)**.** À l'aide de la dérivation, démontrer que

$$\ln(x) \leq x - 1, \qquad x > 0.$$

Préciser le cas d'égalité. Donner une interprétation géométrique de cette inégalité.

10 Points de vigilance pour l'oral

Pendant la présentation, plusieurs difficultés méritent une attention particulière.

— **Domaine de définition :** le logarithme népérien exige un argument strictement positif.

— **Règles algébriques :** le logarithme transforme un produit en somme, mais ne transforme pas une somme en somme.

— **Équations :** toute transformation doit respecter le domaine initial.

— **Variations :** la dérivée $1/x$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

— **Limites :** il faut distinguer la limite de $\ln(x)$ de celle de $\ln(x)/x$.

— **Convexité :** la fonction ln est strictement concave, car sa dérivée seconde est strictement négative.

— **Niveau de rigueur :** les résultats utilisés doivent être énoncés avec leurs hypothèses, notamment pour les limites, les compositions et les changements de variable.

Pour l'oral du CAPES, il est pertinent de présenter une démonstration centrale, par exemple celle de $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, puis de proposer une étude de fonction qui réinvestit les propriétés établies. Les exercices doivent être adaptés au niveau visé et permettre d'illustrer plusieurs approches.

11 Conclusion

La fonction logarithme népérien est étroitement liée à la fonction exponentielle : elle en est la réciproque et permet de résoudre des équations exponentielles. Ses propriétés algébriques facilitent les calculs, tandis que ses propriétés analytiques en font un outil essentiel pour l'étude des fonctions, des limites et des croissances comparées.

Les applications du logarithme dépassent le cadre purement théorique : modélisation exponentielle, échelles logarithmiques et analyse de données en constituent des exemples importants.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletins officiels et ressources institutionnelles, disponibles sur : https://www.education.gouv.fr/.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*. Éduscol : https://eduscol.education.fr/.

[3] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses, Paris.

[4] Hervé Queffélec et Claude Zuily, *Éléments d'analyse pour l'agrégation*, Dunod, Paris.

[5] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI-PCSI-PTSI*, Dunod, Paris.

[6] Jean-Pierre Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble. Version électronique et informations disponibles sur : https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly/.