Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Fonctions exponentielles

Leçon : définition, propriétés, dérivation et applications

Problématique : Comment caractériser une fonction qui transforme une somme en produit et dont le taux de variation instantané est proportionnel à sa valeur ?

Document de travail pour la préparation à l'épreuve orale

Table des matières

Prérequis et objectifs **2**

1 Introduction et motivations **2**

2 Définition et existence de la fonction exponentielle **2**
2.1 Définition par une équation différentielle 2
2.2 Premières propriétés 3
2.3 Valeurs remarquables 3

3 Propriétés algébriques **3**
3.1 Règles de calcul 3
3.2 Exponentielle d'une fonction 4

4 Signe, variations et limites **4**
4.1 Positivité 4
4.2 Sens de variation 4
4.3 Limites aux bornes de $\mathbb{R}$ 4
4.4 Tableau de variations 5

5 Dérivation et convexité **5**
5.1 Dérivée d'une composée 5
5.2 Dérivées successives 5
5.3 Convexité 6

6 Étude graphique **6**

7 Fonctions exponentielles de base a **6**
7.1 Définition 6
7.2 Dérivée et variations 6
7.3 Propriétés algébriques 7

8 Résolution d'équations et d'inéquations **7**
8.1 Équations exponentielles simples 7
8.2 Inéquations 7
8.3 Équations faisant intervenir plusieurs exponentielles 8

9 Équations différentielles **8**
9.1 Équation $y' = ay$ 8
9.2 Condition initiale 8
9.3 Équation $y' = ay + b$ 9

10 Applications **9**
10.1 Croissance et décroissance exponentielles 9
10.2 Temps de doublement 9
10.3 Demi-vie 9
10.4 Remarque sur la validité des modèles 10

11 Exercices proposés **10**
Exercice 1 – Calculs algébriques 10
Exercice 2 – Étude d'une fonction 10
Exercice 3 – Inéquation exponentielle 10
Exercice 4 – Tangente et inégalité 10

Exercice 5 – Équation différentielle 10
Exercice 6 – Croissance d'une population 11
Exercice 7 – Comparaison de fonctions 11
Exercice 8 – Exponentielle de base a 11
Exercice 9 – Approximation locale 11
Exercice 10 – Synthèse 11

12 Éléments de correction des exercices **11**
12.1 Exercice 1 11
12.2 Exercice 2 12
12.3 Exercice 3 12
12.4 Exercice 4 12
12.5 Exercice 5 12
12.6 Exercice 6 12
12.7 Exercice 7 12
12.8 Exercice 8 13
12.9 Exercice 9 13
12.10 Exercice 10 13

13 Conclusion et ouverture **13**

14 Références bibliographiques **13**

Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon mobilise les notions de fonctions réelles d'une variable réelle, de continuité, de dérivabilité, de limites, de suites numériques et de calcul algébrique. On suppose également connus les théorèmes usuels sur les fonctions continues et dérivables, notamment le théorème des valeurs intermédiaires et le théorème des accroissements finis. Selon la construction retenue, la fonction exponentielle peut être introduite à partir d'une équation différentielle, d'une équation fonctionnelle ou de la fonction logarithme.

Objectifs. L'objectif est de définir rigoureusement la fonction exponentielle, d'établir ses propriétés algébriques, analytiques et graphiques, puis de montrer comment elle intervient dans la résolution d'équations, d'inéquations et d'équations différentielles. La leçon doit mettre en évidence les liens entre croissance exponentielle, proportionnalité du taux de variation et phénomènes d'évolution. Elle doit également distinguer la fonction exponentielle de base e des fonctions exponentielles de base $a > 0$.

1 Introduction et motivations

Les fonctions exponentielles interviennent dans de nombreux modèles : évolution d'une population dans un modèle simplifié, désintégration radioactive, intérêts composés, refroidissement dans certains modèles et résolution d'équations différentielles.

Leur propriété caractéristique est la relation

$$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{y}.$$

Elle traduit le fait qu'une translation de la variable correspond à une multiplication de la valeur de la fonction.

Une seconde caractérisation fondamentale est

$$f' = f, \qquad f(0) = 1.$$

Elle relie directement la fonction exponentielle à une équation différentielle.

La question directrice est donc la suivante : comment construire une fonction positive, dérivable, égale à sa propre dérivée et possédant ces propriétés ?

2 Définition et existence de la fonction exponentielle

2.1 Définition par une équation différentielle

Théorème 2.1. *Il existe une unique fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que*

$$f' = f \qquad \textit{et} \qquad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée fonction exponentielle et est notée exp. *On pose*

$$\mathrm{e}^{x} = \exp(x).$$

Remarque 2.2. L'existence et l'unicité peuvent être justifiées à l'aide du théorème général d'existence et d'unicité pour les équations différentielles linéaires. Dans une présentation élémentaire, on peut aussi construire la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme, à condition d'avoir déjà défini et étudié cette dernière.

2.2 Premières propriétés

Par définition,

$$\exp'(x) = \exp(x) \quad \text{et} \quad \exp(0) = 1.$$

La fonction exponentielle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est elle-même.

Proposition 2.3. *Pour tous réels x et y,*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

Démonstration. Fixons $y \in \mathbb{R}$ et considérons

$$g(x) = \exp(x+y)\exp(-x).$$

En utilisant la règle de dérivation d'un produit, on obtient

$$g'(x) = \exp(x+y)\exp(-x) - \exp(x+y)\exp(-x) = 0.$$

La fonction g est donc constante. En particulier,

$$g(x) = g(0) = \exp(y).$$

Ainsi,

$$\exp(x+y)\exp(-x) = \exp(y).$$

On en déduit, en utilisant les propriétés établies ci-dessous ou la même identité avec $-x$,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$

□

Remarque 2.4. Pour rendre cette démonstration entièrement autonome, on établit d'abord que $\exp(x)\exp(-x) = 1$, par exemple en dérivant $x \mapsto \exp(x)\exp(-x)$ et en utilisant sa valeur en zéro. La relation fonctionnelle en découle alors sans circularité.

2.3 Valeurs remarquables

La relation fonctionnelle entraîne

$$\mathrm{e}^0 = 1, \qquad \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1, \qquad \mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Pour tout entier n,

$$\mathrm{e}^{nx} = (\mathrm{e}^x)^n.$$

En particulier, pour tout entier naturel n,

$$\mathrm{e}^n = (\mathrm{e})^n.$$

3 Propriétés algébriques

3.1 Règles de calcul

Proposition 3.1. *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x\mathrm{e}^y}$$

et

$$\boxed{\mathrm{e}^{x-y} = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}}.$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout entier n,

$$(\mathrm{e}^x)^n = \mathrm{e}^{nx}.$$

Démonstration. La première identité est la relation fonctionnelle de l'exponentielle. La seconde s'obtient en écrivant

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{(x-y)+y} = \mathrm{e}^{x-y}\mathrm{e}^y.$$

Comme $\mathrm{e}^y \neq 0$, on peut diviser par e^y. La troisième identité découle de la relation fonctionnelle par récurrence pour les entiers positifs, puis par passage à l'inverse pour les entiers négatifs. □

3.2 Exponentielle d'une fonction

Si u et v sont deux fonctions définies sur un même ensemble, on a, lorsque les expressions sont définies,

$$\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u\mathrm{e}^v, \qquad \mathrm{e}^{u-v} = \frac{\mathrm{e}^u}{\mathrm{e}^v}.$$

Il faut distinguer ces identités de l'affirmation incorrecte

$$\mathrm{e}^{u+v} \neq \mathrm{e}^u + \mathrm{e}^v$$

en général.

Exemple 3.2. *Pour tout réel x,*

$$\mathrm{e}^{2x-1} = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}} = \frac{(\mathrm{e}^x)^2}{\mathrm{e}}.$$

4 Signe, variations et limites

4.1 Positivité

Proposition 4.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$\mathrm{e}^x > 0.$$

Démonstration. On sait que $\mathrm{e}^0 = 1$. La relation fonctionnelle donne

$$\mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-x} = 1.$$

La fonction exponentielle ne s'annule donc jamais. Comme elle est continue et vaut 1 en zéro, elle ne peut changer de signe sur $\mathbb{R}$. Elle est ainsi strictement positive sur $\mathbb{R}$. □

4.2 Sens de variation

Proposition 4.2. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable et

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x > 0.$$

Sa dérivée étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est strictement croissante. □

4.3 Limites aux bornes de $\mathbb{R}$

Théorème 4.3. *On a*

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

Démonstration. Comme e^x est croissante et $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$, on peut montrer que sa croissance n'est pas bornée sur $\mathbb{R}_+$: par exemple, l'inégalité $\mathrm{e}^x \geq 1 + x$ pour $x \geq 0$, obtenue à partir de l'étude de $\mathrm{e}^x - 1 - x$, implique

$$\lim_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty.$$

Ensuite, la relation

$$\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$$

permet d'obtenir

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0.$$

□

4.4 Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

5 Dérivation et convexité

5.1 Dérivée d'une composée

Proposition 5.1. *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et*

$$\boxed{(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u}.$$

Démonstration. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La règle de dérivation d'une fonction composée donne

$$(\exp \circ u)' = (\exp' \circ u)\, u' = \mathrm{e}^u u'.$$

□

Exemple 5.2. *Pour $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-3x}$,*

$$f'(x) = (2x - 3)\mathrm{e}^{x^2-3x}.$$

Comme l'exponentielle est strictement positive, le signe de f' est celui de $2x - 3$. La fonction f décroît sur $]-\infty, \frac{3}{2}]$ et croît sur $[\frac{3}{2}, +\infty[$.

5.2 Dérivées successives

Puisque

$$(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x,$$

une récurrence immédiate montre que, pour tout entier naturel n,

$$\boxed{(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x}.$$

Plus généralement, pour $u(x) = ax + b$,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{ax+b} = a^n \mathrm{e}^{ax+b}.$$

5.3 Convexité

Proposition 5.3. *La fonction exponentielle est strictement convexe sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a

$$(\mathrm{e}^x)'' = \mathrm{e}^x > 0.$$

La dérivée seconde est strictement positive sur $\mathbb{R}$, donc la fonction exponentielle est strictement convexe. □

Corollaire 5.4. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x \geq 1 + x,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration. La courbe d'une fonction convexe dérivable est située au-dessus de chacune de ses tangentes. En zéro, la tangente à la courbe de l'exponentielle a pour équation

$$y = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0(x - 0) = 1 + x.$$

On obtient l'inégalité annoncée. La stricte convexité assure que l'égalité n'a lieu qu'en zéro. □

6 Étude graphique

La courbe de la fonction exponentielle possède les caractéristiques suivantes :

— elle est définie sur $\mathbb{R}$;
— elle est strictement positive ;
— elle passe par le point $(0, 1)$;
— elle est strictement croissante ;
— elle est strictement convexe ;
— elle admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$;
— sa tangente au point $(0, 1)$ a pour équation $y = x + 1$.

Remarque 6.1. La courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses : l'équation $\mathrm{e}^x = 0$ n'a aucune solution réelle.

7 Fonctions exponentielles de base a

7.1 Définition

Pour tout réel $a > 0$, on définit la fonction exponentielle de base a par

$$f_a(x) = a^x = \mathrm{e}^{x \ln(a)}.$$

Cette définition utilise la fonction logarithme népérien, inverse de la fonction exponentielle.

7.2 Dérivée et variations

La règle de dérivation d'une composée donne

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln(a)}.$$

Le sens de variation dépend de la base :

— si $a > 1$, alors $\ln(a) > 0$ et a^x est strictement croissante ;
— si $0 < a < 1$, alors $\ln(a) < 0$ et a^x est strictement décroissante ;
— si $a = 1$, alors $a^x = 1$ pour tout x.

7.3 Propriétés algébriques

Pour $a > 0$ et $x, y \in \mathbb{R}$,

$$a^{x+y} = a^x a^y, \qquad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}.$$

Exemple 7.1. *La quantité d'un capital placé à intérêts composés, au taux périodique r et avec une capitalisation par période, est modélisée après n périodes par*

$$C_n = C_0(1+r)^n,$$

où C_0 est le capital initial et $r > -1$. Il s'agit d'une suite géométrique ; le modèle continu correspondant fait intervenir une exponentielle.

8 Résolution d'équations et d'inéquations

8.1 Équations exponentielles simples

La fonction exponentielle étant strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$, on a

$$\mathrm{e}^u = \mathrm{e}^v \iff u = v.$$

De plus, l'équation

$$\mathrm{e}^x = a$$

admet une unique solution réelle si et seulement si $a > 0$. Cette solution est $x = \ln(a)$.

Exemple 8.1. *Résoudre*

$$\mathrm{e}^{2x-1} = \mathrm{e}^{x+2}.$$

Par injectivité de l'exponentielle,

$$2x - 1 = x + 2,$$

donc $x = 3$.

8.2 Inéquations

La stricte croissance de l'exponentielle entraîne

$$\mathrm{e}^u < \mathrm{e}^v \iff u < v.$$

Exemple 8.2. *Résoudre*

$$\mathrm{e}^{3x-2} \leq \mathrm{e}^{x+4}.$$

On obtient

$$3x - 2 \leq x + 4 \iff 2x \leq 6 \iff x \leq 3.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$]-\infty, 3].$$

8.3 Équations faisant intervenir plusieurs exponentielles

Exemple 8.3. *Résoudre*

$$\mathrm{e}^{2x} - 3\mathrm{e}^{x} + 2 = 0.$$

On pose $X = \mathrm{e}^{x}$*. Puisque* $X > 0$*, l'équation devient*

$$X^2 - 3X + 2 = 0,$$

soit

$$(X-1)(X-2) = 0.$$

Ainsi, $X = 1$ *ou* $X = 2$*. On obtient*

$$x = 0 \quad ou \quad x = \ln 2.$$

L'ensemble des solutions est

$$\{0, \ln 2\}.$$

9 Équations différentielles

9.1 Équation $y' = ay$

Théorème 9.1. *Soit* $a \in \mathbb{R}$*. Les solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle*

$$y' = ay$$

sont exactement les fonctions

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax}, \quad C \in \mathbb{R}}.$$

Démonstration. La fonction $y(x) = Ce^{ax}$ vérifie directement l'équation puisque

$$y'(x) = aCe^{ax} = ay(x).$$

Réciproquement, si $y' = ay$, considérons

$$g(x) = y(x)e^{-ax}.$$

Alors

$$g'(x) = y'(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0.$$

La fonction g est constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$y(x)e^{-ax} = C,$$

soit

$$y(x) = Ce^{ax}.$$

□

9.2 Condition initiale

Pour le problème

$$\begin{cases} y' = ay, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

l'unique solution est

$$\boxed{y(x) = y_0 e^{ax}}.$$

Le signe de a détermine le comportement :

— si $a > 0$ et $y_0 > 0$, la solution croît exponentiellement ;

— si $a < 0$ et $y_0 > 0$, la solution décroît vers zéro quand $x \to +\infty$;

— si $a = 0$, la solution est constante.

9.3 Équation $y' = ay + b$

Si $a \neq 0$, les solutions de

$$y' = ay + b$$

sont

$$\boxed{y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

En effet, la fonction constante $-b/a$ est une solution particulière et les solutions de l'équation homogène associée sont Ce^{ax}.

10 Applications

10.1 Croissance et décroissance exponentielles

Une grandeur $N(t)$ dont le taux de variation est proportionnel à sa valeur satisfait le modèle

$$N'(t) = kN(t).$$

La solution associée à la condition initiale $N(0) = N_0$ est

$$\boxed{N(t) = N_0 e^{kt}}.$$

Si $k > 0$, le modèle décrit une croissance ; si $k < 0$, il décrit une décroissance.

Ce modèle est utilisé notamment pour décrire, dans certaines conditions, une population ou la désintégration d'une substance radioactive.

10.2 Temps de doublement

Supposons $N_0 > 0$ et $k > 0$. Le temps T nécessaire pour que la quantité double vérifie

$$N(T) = 2N_0.$$

Ainsi,

$$N_0 e^{kT} = 2N_0 \iff e^{kT} = 2 \iff kT = \ln 2.$$

On obtient

$$\boxed{T = \frac{\ln 2}{k}}.$$

Ce temps ne dépend pas de la quantité initiale.

10.3 Demi-vie

Pour une décroissance exponentielle

$$N(t) = N_0 e^{-kt}, \qquad k > 0,$$

la demi-vie $T_{1/2}$ est définie par

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

On trouve

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{k}}.$$

10.4 Remarque sur la validité des modèles

Une fonction exponentielle peut fournir un modèle pertinent sur un intervalle donné, mais elle ne décrit pas nécessairement toute évolution réelle. Une population, par exemple, ne croît généralement pas indéfiniment à taux proportionnel constant. Il convient donc de préciser les hypothèses et le domaine de validité du modèle.

11 Exercices proposés

Les exercices suivants peuvent servir à la fois d'applications immédiates, d'approfondissements et de questions de relance lors de l'oral.

Exercice 1 – Calculs algébriques

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{e^{3x-2}}{e^{x+1}}, \qquad B = e^{2x}(e^{-x} + e^{x}), \qquad C = \frac{e^{x+1}e^{2-x}}{e^{3}}.$$

Préciser les propriétés utilisées.

Exercice 2 – Étude d'une fonction

Soit

$$f(x) = (x-2)e^{x}.$$

a) Calculer $f'(x)$.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

c) Déterminer les limites aux bornes de $\mathbb{R}$.

d) Étudier la convexité de f.

Exercice 3 – Inéquation exponentielle

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$e^{2x} - 5e^{x} + 6 \leq 0.$$

On posera $X = e^{x}$ et l'on justifiera les contraintes imposées à X.

Exercice 4 – Tangente et inégalité

À l'aide de la convexité de la fonction exponentielle, démontrer que

$$e^{x} \geq 1 + x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Étudier le cas d'égalité, puis en déduire que

$$e^{x} \geq 1 + x + \frac{x^{2}}{2}$$

est fausse sur $\mathbb{R}$ en général, en donnant un contre-exemple si nécessaire.

Exercice 5 – Équation différentielle

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = 3y, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Déterminer le temps nécessaire pour que la solution atteigne la valeur 10.

Exercice 6 – Croissance d'une population

Une population est modélisée par

$$P(t) = 500e^{0,04t},$$

où t est exprimé en années.

a) Calculer la population initiale.

b) Déterminer le taux de croissance instantané relatif $\frac{P'(t)}{P(t)}$.

c) Calculer le temps de doublement.

d) Discuter les limites du modèle.

Exercice 7 – Comparaison de fonctions

Étudier le signe de

$$f(x) = e^x - x - 1.$$

Déterminer le minimum de f et le cas d'égalité dans l'inégalité $e^x \geq x + 1$.

Exercice 8 – Exponentielle de base a

Soit $a > 0$ et $a \neq 1$. Étudier les variations et les limites aux bornes de $\mathbb{R}$ de

$$f_a(x) = a^x.$$

Expliquer le rôle du signe de $\ln(a)$.

Exercice 9 – Approximation locale

À l'aide du développement limité de l'exponentielle en zéro, établir

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad (x \to 0).$$

En déduire un équivalent de $e^x - 1$ en zéro, puis un équivalent de $e^x - 1 - x$ en zéro.

Exercice 10 – Synthèse

Soit $f(x) = e^x/(1 + e^x)$.

a) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

c) Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$.

d) Étudier la symétrie éventuelle de la courbe.

e) Interpréter la fonction comme une fonction de saturation.

12 Éléments de correction des exercices

12.1 Exercice 1

On obtient

$$A = e^{2x-3}, \qquad B = e^x + e^{3x}, \qquad C = 1.$$

12.2 Exercice 2

On a

$$f'(x) = (x-1)e^x.$$

Puisque $e^x > 0$, le signe de f' est celui de $x-1$. La fonction décroît jusqu'à 1, puis croît. De plus,

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x = +\infty.$$

Enfin,

$$f''(x) = xe^x.$$

La fonction est concave sur $]-\infty, 0[$ et convexe sur $]0, +\infty[$.

12.3 Exercice 3

L'équation associée est

$$X^2 - 5X + 6 \leq 0 \iff (X-2)(X-3) \leq 0.$$

Ainsi $2 \leq X \leq 3$. Comme $X = e^x$,

$$\boxed{x \in [\ln 2, \ln 3]}.$$

12.4 Exercice 4

La convexité donne $e^x \geq 1 + x$. L'égalité a lieu uniquement pour $x = 0$.
La seconde inégalité proposée est fausse en général. Par exemple, pour $x = -1$,

$$e^{-1} < 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

12.5 Exercice 5

La solution est

$$y(t) = 2e^{3t}.$$

L'équation $y(t) = 10$ équivaut à

$$2e^{3t} = 10 \iff t = \frac{\ln 5}{3}.$$

12.6 Exercice 6

On a $P(0) = 500$ et

$$P'(t) = 0,04P(t).$$

Le temps de doublement vaut

$$T = \frac{\ln 2}{0,04} = 25 \ln 2 \approx 17,33 \text{ années.}$$

12.7 Exercice 7

La dérivée est

$$f'(x) = e^x - 1.$$

Elle est négative si $x < 0$ et positive si $x > 0$. La fonction admet donc un minimum nul en zéro.

12.8 Exercice 8

On a

$$f'_a(x) = a^x \ln(a).$$

Si $a > 1$, la fonction est croissante et ses limites sont 0 en $-\infty$ et $+\infty$ en $+\infty$. Si $0 < a < 1$, elle est décroissante et les deux limites sont inversées.

12.9 Exercice 9

Le développement limité de l'exponentielle en zéro donne

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Par conséquent,

$$e^x - 1 \sim x \quad \text{et} \quad e^x - 1 - x \sim \frac{x^2}{2}.$$

12.10 Exercice 10

Le dénominateur $1 + e^x$ est strictement positif. On obtient

$$f'(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0.$$

Les limites sont

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1.$$

Enfin,

$$f(-x) = 1 - f(x).$$

La courbe admet donc le point $(0, \frac{1}{2})$ comme centre de symétrie.

13 Conclusion et ouverture

La fonction exponentielle est caractérisée par des propriétés étroitement liées : positivité, relation fonctionnelle, dérivée égale à elle-même, croissance et convexité. Elle constitue un outil central pour l'étude des fonctions composées, la résolution d'équations et la modélisation d'évolutions proportionnelles à la grandeur étudiée.

Une ouverture naturelle consiste à étudier la fonction logarithme népérien, réciproque de l'exponentielle, puis à montrer que les fonctions exponentielles de base $a > 0$ s'écrivent

$$a^x = e^{x \ln(a)}.$$

On peut également prolonger la leçon par les équations différentielles linéaires et les développements limités.

14 Références bibliographiques

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter les programmes en vigueur sur : https://www.education.gouv.fr/.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets, rapports de jury et programmes du CAPES externe de mathématiques*. Ressources officielles disponibles sur : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.

[3] Xavier Gourdon, *Les maths en tête – Analyse*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les notions d'analyse et les démonstrations.

[4] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI-PCSI-PTSI*, Dunod. Cours et exercices d'analyse, notamment sur les fonctions usuelles et les équations différentielles.

[5] Exercices et ressources complémentaires : https://www.maths-et-tiques.fr/. À utiliser en complément des ouvrages de cours, en vérifiant l'adéquation au niveau visé.