Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Croissance comparée des fonctions réelles

Fonctions logarithme, puissance et exponentielle

Problématique. Comment comparer, lorsque la variable tend vers l'infini, les vitesses de croissance des fonctions

$$x \longmapsto \ln x, \qquad x \longmapsto x^a, \qquad x \longmapsto \mathrm{e}^x,$$

où a est un réel strictement positif.

Leçon de synthèse et applications

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

1.1 Prérequis 2

1.2 Objectifs 2

2 Introduction et problématique **2**

3 Définitions et résultats fondamentaux **2**

3.1 La notation de Landau 2

3.2 Énoncé principal 3

4 Démonstrations des résultats fondamentaux **3**

4.1 Le logarithme est négligeable devant toute puissance 3

4.2 Toute puissance est négligeable devant l'exponentielle 4

4.3 Démonstration alternative pour les puissances entières 4

5 Généralisations **5**

5.1 Exponentielle de taux positif 5

5.2 Puissances du logarithme 5

5.3 Croissance comparée à l'infini pour des fonctions composées 5

6 Cas particuliers et précautions **6**

6.1 Le rôle de l'exposant 6

6.2 Limites en 0^+ 6

7 Applications au calcul de limites **6**

7.1 Exemple 1 : quotient d'un logarithme par une puissance 6

7.2 Exemple 2 : quotient d'un polynôme par l'exponentielle 6

7.3 Exemple 3 : comparaison entre deux exponentielles 7

8 Exercices **7**

9 Éléments de correction **8**

9.1 Exercice 1 8

9.2 Exercice 2 8

9.3 Exercice 3 9

9.4 Exercice 5 9

9.5 Exercice 7 9

10 Conclusion **9**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

Cette leçon suppose connus :

- les limites de fonctions en un point et en l'infini ;
- les opérations sur les limites et les formes indéterminées ;
- les propriétés algébriques et analytiques de l'exponentielle et du logarithme népérien ;
- la dérivation et l'étude des variations ;
- le théorème de l'Hôpital, lorsque celui-ci est disponible dans le cadre théorique retenu ;
- la définition des puissances réelles positives par $x^a = \mathrm{e}^{a \ln x}$ pour $x > 0$.

1.2 Objectifs

L'objectif principal est d'établir et d'utiliser la hiérarchie des vitesses de croissance du logarithme, des puissances et de l'exponentielle. On cherchera à :

- démontrer les limites fondamentales de croissance comparée ;
- préciser le rôle de l'hypothèse $a > 0$;
- étudier des quotients de fonctions et lever certaines formes indéterminées ;
- comprendre les liens entre croissance comparée, asymptotes, dérivation et équivalents ;
- proposer des exercices permettant de mobiliser ces résultats dans des problèmes de limites.

2 Introduction et problématique

La croissance comparée consiste à comparer les valeurs de plusieurs fonctions lorsque leur variable tend vers une limite donnée, en particulier vers $+\infty$.

Les fonctions logarithme, puissance et exponentielle fournissent trois échelles de croissance différentes. Lorsque x tend vers $+\infty$, le logarithme croît moins vite que toute puissance strictement positive, tandis que toute puissance croît moins vite que l'exponentielle.

La hiérarchie fondamentale est

$$\boxed{\ln x \ll x^a \ll \mathrm{e}^x \qquad (x \to +\infty,\ a > 0).}$$

Cette notation sera précisée par la définition du petit o. Elle exprime ici que les quotients correspondants tendent vers zéro.

La problématique est donc la suivante : comment établir rigoureusement ces comparaisons et comment les utiliser dans le calcul de limites ?

3 Définitions et résultats fondamentaux

3.1 La notation de Landau

Définition 3.1. Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$, avec $g(x) \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit que

$$f(x) = \mathrm{o}(g(x)) \quad \text{lorsque } x \to +\infty$$

si et seulement si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Cette notation signifie que f est négligeable devant g au voisinage de $+\infty$.

Remarque 3.2. La relation $f = \mathrm{o}(g)$ n'est pas une égalité entre fonctions. Elle décrit le comportement asymptotique du quotient f/g.

3.2 Énoncé principal

Théorème 3.3 (Croissance comparée)**.** *Pour tout réel $a > 0$, on a :*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0}$$

et

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.}$$

Par conséquent,

$$\ln x = \mathrm{o}(x^a) \qquad \textit{et} \qquad x^a = \mathrm{o}(\mathrm{e}^x).$$

Corollaire 3.4. Pour tout $a > 0$,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\ln x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^a} = +\infty.$$

De plus,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Démonstration. Les deux premières limites du théorème donnent les deux premières limites du corollaire par passage à l'inverse, les fonctions considérées étant strictement positives pour $x > 1$. Enfin,

$$\frac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = \frac{\ln x}{x}\frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

Les deux facteurs tendent vers zéro, donc leur produit tend vers zéro. □

4 Démonstrations des résultats fondamentaux

4.1 Le logarithme est négligeable devant toute puissance

Proposition 4.1. *Pour tout $a > 0$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.$$

Première démonstration : changement de variable. Posons $t = \ln x$. Alors $x = \mathrm{e}^t$ et $t \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$. On obtient

$$\frac{\ln x}{x^a} = \frac{t}{\mathrm{e}^{at}}.$$

Par le théorème de l'Hôpital,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\mathrm{e}^{at}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{a\mathrm{e}^{at}} = 0.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0.}$$

□

Remarque 4.2. Cette démonstration utilise le théorème de l'Hôpital. Si ce théorème n'est pas admis dans le cadre retenu, on peut étudier la fonction $t \mapsto t/\mathrm{e}^{at}$ par dérivation, ou utiliser une inégalité exponentielle issue de la série de l'exponentielle.

4.2 Toute puissance est négligeable devant l'exponentielle

Proposition 4.3. *Pour tout $a > 0$,*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Démonstration par logarithme. Pour $x > 0$, on écrit

$$\frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{a\ln x - x}.$$

Or

$$a\ln x - x = x\left(a\frac{\ln x}{x} - 1\right).$$

D'après la proposition précédente appliquée à $a = 1$,

$$\frac{\ln x}{x} \longrightarrow 0.$$

Le facteur entre parenthèses tend donc vers -1, et par conséquent

$$a\ln x - x \longrightarrow -\infty.$$

Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.}$$

□

Remarque 4.4. Cette preuve met en évidence un mécanisme général : comparer x^a à e^x revient à comparer $a\ln x$ à x.

4.3 Démonstration alternative pour les puissances entières

Pour tout entier $n \geq 0$, on peut utiliser le développement en série de l'exponentielle :

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad (x \geq 0).$$

Pour $x > 0$,

$$\mathrm{e}^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Par conséquent,

$$0 \leq \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \leq \frac{(n+1)!}{x}.$$

Le théorème des gendarmes donne

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Cette méthode donne une démonstration élémentaire pour les puissances entières. Pour les exposants réels positifs, on peut choisir un entier $n > a$ et utiliser, pour $x \geq 1$, l'inégalité $x^a \leq x^n$.

5 Généralisations

5.1 Exponentielle de taux positif

Proposition 5.1. *Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^{bx}} = 0.}$$

Démonstration. On écrit

$$\frac{x^a}{\mathrm{e}^{bx}} = \mathrm{e}^{a\ln x - bx} = \mathrm{e}^{x\left(a\frac{\ln x}{x} - b\right)}.$$

Comme $\ln x/x \to 0$, le terme entre parenthèses tend vers $-b < 0$. L'exposant tend donc vers $-\infty$, d'où le résultat. □

5.2 Puissances du logarithme

Proposition 5.2. *Pour tous réels $a > 0$ et $b > 0$,*

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0.}$$

Démonstration. Posons $t = \ln x$. Le quotient devient

$$\frac{t^a}{\mathrm{e}^{bt}}.$$

En prenant le logarithme du quotient, on obtient

$$a\ln t - bt.$$

Comme $\ln t/t \to 0$, ce terme tend vers $-\infty$. Le quotient tend donc vers zéro. □

5.3 Croissance comparée à l'infini pour des fonctions composées

Les résultats précédents permettent notamment d'affirmer que

$$\frac{\ln(x^2+1)}{x} \longrightarrow 0, \qquad \frac{x^2+3x}{\mathrm{e}^x} \longrightarrow 0.$$

Pour le premier quotient, on utilise

$$\ln(x^2+1) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right),$$

pour $x > 0$. Le premier terme, divisé par x, tend vers zéro ; le second terme tend lui-même vers zéro.

Pour le second quotient, on sépare les termes :

$$\frac{x^2+3x}{\mathrm{e}^x} = \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} + 3\frac{x}{\mathrm{e}^x},$$

et chacun des deux termes tend vers zéro.

6 Cas particuliers et précautions

6.1 Le rôle de l'exposant

La condition $a > 0$ est essentielle dans les deux résultats fondamentaux.

— Si $a = 0$, alors $x^a = 1$ pour $x > 0$. On a $\ln x/1 \to +\infty$ et $1/\mathrm{e}^x \to 0$.
— Si $a < 0$, alors $x^a = 1/x^{-a} \to 0$. Dans ce cas, $x^a/\mathrm{e}^x \to 0$, mais la comparaison $\ln x/x^a \to 0$ est fausse : ce quotient tend vers $+\infty$.

6.2 Limites en 0^+

La croissance comparée peut aussi être utilisée près de zéro. En posant $t = 1/x$, on obtient, pour $a > 0$,

$$\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0.$$

En effet,

$$x^a \ln x = -\frac{\ln t}{t^a}, \qquad t = \frac{1}{x} \longrightarrow +\infty.$$

On a également

$$\lim_{x\to 0^+} x^a = 0, \qquad \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^x = 1.$$

Il convient de distinguer ces limites de celles obtenues en $+\infty$: la comparaison dépend du point considéré.

7 Applications au calcul de limites

7.1 Exemple 1 : quotient d'un logarithme par une puissance

Calculons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}}.$$

Le résultat fondamental, appliqué à $a = 1/3$, donne directement

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/3}} = 0.}$$

7.2 Exemple 2 : quotient d'un polynôme par l'exponentielle

On cherche

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{\mathrm{e}^x}.$$

Par linéarité,

$$\frac{2x^3 - 5x + 1}{\mathrm{e}^x} = 2\frac{x^3}{\mathrm{e}^x} - 5\frac{x}{\mathrm{e}^x} + \frac{1}{\mathrm{e}^x}.$$

Les trois termes tendent vers zéro. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{\mathrm{e}^x} = 0.}$$

7.3 Exemple 3 : comparaison entre deux exponentielles

Pour $a, b > 0$, considérons

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{bx}} = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{(a-b)x}.$$

On distingue trois cas :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{bx}} = \begin{cases} 0 & \text{si } a < b, \\ 1 & \text{si } a = b, \\ +\infty & \text{si } a > b. \end{cases}}$$

Cet exemple montre que deux exponentielles sont comparées en fonction de leurs taux de croissance.

8 Exercices

Les exercices suivants sont proposés dans un ordre progressif. Ils permettent de vérifier la maîtrise des résultats fondamentaux, puis de les appliquer à des situations plus élaborées.

Exercice 8.1 (Limites fondamentales)**.** Calculer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^x}$;

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^7}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x}$.

Exercice 8.2 (Exposant réel)**.** Soit $a > 0$. Déterminer les limites

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a}, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^{2x}}.$$

Donner une démonstration de chaque résultat.

Exercice 8.3 (Polynômes et exponentielle)**.** Calculer

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^5 - 2x^2 + 7}{\mathrm{e}^x}.$$

Généraliser le résultat à tout polynôme P.

Exercice 8.4 (Puissances du logarithme)**.** Pour $a, b > 0$, établir que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^b} = 0.$$

Indication : poser $t = \ln x$.

Exercice 8.5 (Limite en zéro)**.** Pour $a > 0$, calculer

$$\lim_{x \to 0^+} x^a \ln x.$$

Indication : effectuer le changement de variable $t = 1/x$.

Exercice 8.6 (Comparaison d'exponentielles)**.** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, étudier, lorsque $x \to +\infty$,

$$\frac{\mathrm{e}^{ax}}{\mathrm{e}^{bx}}.$$

Préciser les cas $a < b$, $a = b$ et $a > b$.

Exercice 8.7 (Étude d'une fonction)**.** On considère, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\ln x}{x}.$$

Étudier les limites de f aux bornes de son domaine, puis déterminer ses variations.

Exercice 8.8 (Question de jury)**.** Démontrer que, pour tout entier $n \geq 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

Proposer deux démonstrations distinctes, l'une utilisant une inégalité issue du développement en série de l'exponentielle, l'autre utilisant le théorème de l'Hôpital.

Exercice 8.9 (Problème de synthèse)**.** Soient $a > 0$ et $b > 0$. Étudier les limites en $+\infty$ de

$$f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^b} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^a}{\mathrm{e}^{bx}}.$$

Expliquer pourquoi les deux fonctions tendent vers zéro.

9 Éléments de correction

9.1 Exercice 1

Les limites sont respectivement

$$0, \qquad 0, \qquad +\infty, \qquad 0.$$

On applique les théorèmes de croissance comparée et, pour le troisième quotient, on inverse le quotient x^7/e^x.

9.2 Exercice 2

Pour tout $a > 0$,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^{2x}} = 0.$$

La première limite se démontre par le changement de variable $t = \ln x$; la seconde par comparaison logarithmique.

9.3 Exercice 3

Si P est un polynôme, il existe un entier $n \geq 0$ et une constante $C > 0$ tels que, pour x suffisamment grand,

$$|P(x)| \leq Cx^n.$$

Par conséquent,

$$\left|\frac{P(x)}{\mathrm{e}^x}\right| \leq C\frac{x^n}{\mathrm{e}^x} \longrightarrow 0.$$

Ainsi, pour tout polynôme P,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{\mathrm{e}^x} = 0.}$$

9.4 Exercice 5

Avec $t = 1/x$, on a

$$x^a \ln x = -\frac{\ln t}{t^a}.$$

Puisque $t \to +\infty$ lorsque $x \to 0^+$, la limite vaut zéro.

9.5 Exercice 7

On a

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

La fonction est croissante sur $]0, \mathrm{e}[$ et décroissante sur $]\mathrm{e}, +\infty[$. Elle atteint son maximum en $x = \mathrm{e}$, de valeur $1/\mathrm{e}$. De plus,

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

10 Conclusion

La croissance comparée fournit des outils essentiels pour le calcul des limites et l'étude asymptotique des fonctions.

Pour tout $a > 0$,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0.}$$

On retient donc la hiérarchie

$$\boxed{\ln x \ll x^a \ll \mathrm{e}^x \qquad (a > 0).}$$

Cette hiérarchie doit être comprise, démontrée et mobilisée dans des calculs de limites. À l'oral du CAPES, il est également important de préciser les hypothèses, de distinguer les résultats admis des résultats démontrés et de choisir une méthode adaptée au niveau considéré.

Références

[1] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3e édition, McGraw-Hill, 1976.

[2] T. M. Apostol, *Calculus, Volume 1 : One-Variable Calculus, with an Introduction to Linear Algebra*, 2e édition, Wiley, 1967.

[3] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 1994.

[4] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, textes officiels disponibles sur le site du ministère : https://www.education.gouv.fr/.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Sujets et rapports des jurys du CAPES externe de mathématiques*, ressources disponibles sur le site officiel : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.