Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Courbes planes définies par des équations paramétriques

Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de fonction réelle d'une variable réelle, de continuité, de dérivabilité et de dérivée. Elle mobilise également les vecteurs du plan, les coordonnées cartésiennes, les fonctions trigonométriques, les limites et les développements limités lorsqu'ils sont au programme considéré. La connaissance des équations cartésiennes des droites et des cercles est utile. Selon le niveau d'approfondissement retenu, on pourra faire appel aux nombres complexes et aux notions élémentaires de géométrie différentielle.

Objectifs. L'objectif principal est d'étudier une courbe plane à partir d'une représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in I,$$

où I est un intervalle réel. Il s'agit de comprendre comment le paramètre décrit la courbe, de déterminer ses points particuliers, ses tangentes, ses variations et ses éventuelles singularités, puis de construire un tracé raisonné. On cherchera également à établir des liens entre représentations paramétriques, équations cartésiennes et applications du plan. Enfin, on mettra en évidence l'intérêt de cette approche pour décrire des trajectoires, des lieux géométriques et des courbes qui ne sont pas nécessairement les graphes de fonctions.

Table des matières

Prérequis et objectifs **1**

1 Introduction et motivation **2**

2 Définition et premières propriétés **2**
2.1 Définition d'une représentation paramétrique 2
2.2 Passage à une équation cartésienne 2
2.3 Injectivité et points multiples 3

3 Étude différentielle d'une courbe paramétrée **3**
3.1 Vecteur dérivé et tangente 3
3.2 Points stationnaires et singularités 4
3.3 Dérivées successives et courbure 4

4 Étude pratique et tracé d'une courbe **5**
4.1 Symétries 5
4.2 Asymptotes 5

5 Exemples fondamentaux **6**
5.1 Le cercle 6
5.2 L'ellipse 6
5.3 La cycloïde 6

6 Applications et interprétations **7**
6.1 Cinématique 7
6.2 Longueur d'un arc 7
6.3 Changement de paramètre 7

7 Exercices proposés **7**

8 Éléments de correction des exercices **9**

9 Conclusion **10**

1 Introduction et motivation

Une courbe plane peut être décrite de plusieurs façons : par une équation cartésienne $F(x, y) = 0$, comme graphe d'une fonction ou par une représentation paramétrique.

La représentation paramétrique consiste à faire dépendre les coordonnées d'un point d'un même paramètre réel. Elle est particulièrement adaptée à l'étude des trajectoires et des courbes présentant plusieurs points pour une même abscisse.

Exemple 1.1. Le cercle de centre l'origine et de rayon $R > 0$ admet la représentation

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\sin t, \end{cases} \qquad t \in [0, 2\pi].$$

On retrouve immédiatement

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2.$$

Le paramètre permet de parcourir le cercle dans le sens trigonométrique lorsque t croît.

La question centrale est donc la suivante : comment déduire les propriétés géométriques d'une courbe des propriétés analytiques des fonctions x et y ?

2 Définition et premières propriétés

2.1 Définition d'une représentation paramétrique

Définition 2.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soient $x, y : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions. La représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \qquad t \in I,$$

définit la courbe paramétrée

$$M : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad t \longmapsto M(t) = (x(t), y(t)).$$

L'image $M(I)$ est la courbe géométrique décrite par cette représentation.

Il convient de distinguer la courbe paramétrée, qui contient l'information sur le parcours, et son image géométrique, qui est l'ensemble des points parcourus.

Remarque 2.2. Deux paramétrisations peuvent avoir la même image géométrique sans décrire le même parcours ni la même vitesse. L'intervalle du paramètre et le sens de parcours font partie des informations importantes.

2.2 Passage à une équation cartésienne

Lorsque cela est possible, on peut éliminer le paramètre t afin d'obtenir une relation entre x et y.

Exemple 2.3. Considérons

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^2. \end{cases}$$

Comme $t = x$, on obtient $y = x^2$. La courbe est la parabole d'équation cartésienne

$$y = x^2.$$

Exemple 2.4. Pour

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t, \end{cases} \qquad a, b > 0,$$

on utilise $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ pour obtenir

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

La courbe est une ellipse.

Remarque 2.5. L'élimination du paramètre ne suffit pas toujours à déterminer précisément la portion de courbe parcourue. Il faut également tenir compte de l'intervalle I. Une équation cartésienne peut décrire un ensemble plus grand que l'image de la paramétrisation étudiée.

2.3 Injectivité et points multiples

Définition 2.6. Un point P de la courbe est dit multiple pour une paramétrisation s'il existe deux paramètres distincts $t_1, t_2 \in I$ tels que

$$M(t_1) = M(t_2) = P, \qquad t_1 \neq t_2.$$

L'injectivité de M garantit que chaque point de l'image est atteint une seule fois. En revanche, une courbe peut posséder des points multiples sans que cela empêche son étude paramétrique.

Exemple 2.7. La représentation

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad t \in [0, 4\pi],$$

parcourt deux fois le même cercle unité.

3 Étude différentielle d'une courbe paramétrée

3.1 Vecteur dérivé et tangente

On suppose désormais que x et y sont dérivables sur un intervalle ouvert I.

Définition 3.1. Le vecteur dérivé de la courbe au paramètre t est

$$M'(t) = (x'(t), y'(t)).$$

Il est appelé vecteur vitesse lorsque t représente le temps.

Proposition 3.2. *Si $M'(t_0) \neq (0,0)$, la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente dont un vecteur directeur est*

$$(x'(t_0), y'(t_0)).$$

Une équation de cette tangente est

$$y'(t_0)(x - x(t_0)) - x'(t_0)(y - y(t_0)) = 0.$$

Cette expression reste valable lorsque $x'(t_0) = 0$, contrairement à la formule de pente y'/x'. Lorsque $x'(t_0) \neq 0$, on peut écrire

$$\frac{dy}{dx}(t_0) = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}.$$

Lorsque $x'(t_0) = 0$ et $y'(t_0) \neq 0$, la tangente est verticale.

Exemple 3.3. Étudions la parabole

$$M(t) = (t, t^2).$$

On a

$$M'(t) = (1, 2t).$$

Le vecteur dérivé n'est jamais nul. Au point $M(t_0) = (t_0, t_0^2)$, la tangente a pour équation

$$y - t_0^2 = 2t_0(x - t_0),$$

soit

$$y = 2t_0 x - t_0^2.$$

3.2 Points stationnaires et singularités

Définition 3.4. Un paramètre t_0 est stationnaire si

$$M'(t_0) = (0, 0).$$

On ne peut alors pas appliquer directement la formule précédente pour déterminer la tangente.

Un point stationnaire n'est pas nécessairement un point singulier au sens géométrique. Il faut étudier les premiers termes non nuls du développement de $x(t)$ et de $y(t)$ au voisinage de t_0.

Exemple 3.5. Considérons

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t^3.$$

Au paramètre $t = 0$, le vecteur dérivé est nul. La courbe vérifie cependant

$$y^2 = x^3, \qquad x \geq 0.$$

Elle présente en l'origine un point de rebroussement de première espèce, appelé aussi cuspide. Les premiers termes non nuls sont $x(t) = t^2$ et $y(t) = t^3$, ce qui permet d'identifier le comportement local.

3.3 Dérivées successives et courbure

Lorsque x et y sont deux fois dérivables, on peut étudier l'évolution du vecteur tangent à l'aide de

$$M''(t) = \big(x''(t), y''(t)\big).$$

Si $M'(t) \neq 0$, la courbure non orientée vaut

$$\kappa(t) = \frac{|x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)|}{\big(x'(t)^2 + y'(t)^2\big)^{3/2}}.$$

Cette formule est valable lorsque la vitesse ne s'annule pas. Le numérateur mesure la non-colinéarité des vecteurs vitesse et accélération.

Pour une courbe régulière, une courbure nulle indique localement une absence de courbure instantanée au paramètre considéré ; elle ne suffit pas, à elle seule, à caractériser globalement une portion de droite.

4 Étude pratique et tracé d'une courbe

L'étude d'une courbe paramétrée repose sur une démarche méthodique.

1. Déterminer l'intervalle du paramètre.
2. Étudier les limites de $x(t)$ et $y(t)$ aux bornes de l'intervalle.
3. Calculer les dérivées $x'(t)$ et $y'(t)$.
4. Étudier les variations des coordonnées.
5. Rechercher les points stationnaires et les points multiples.
6. Déterminer les tangentes remarquables.
7. Rechercher les symétries éventuelles.
8. Déduire les asymptotes lorsqu'elles existent.
9. Construire un tableau de variations conjoint et réaliser un tracé cohérent avec le sens de parcours.

4.1 Symétries

Les symétries peuvent être déduites des relations entre les fonctions coordonnées.

Par exemple, si

$$x(-t) = x(t), \qquad y(-t) = -y(t),$$

alors les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Si le domaine est symétrique par rapport à zéro, l'image de la courbe l'est également.

De même, les relations

$$x(-t) = -x(t), \qquad y(-t) = y(t)$$

indiquent une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Enfin, si

$$x(-t) = -x(t), \qquad y(-t) = -y(t),$$

la courbe possède une symétrie centrale par rapport à l'origine, sous réserve que les paramètres concernés appartiennent au domaine.

4.2 Asymptotes

Une asymptote peut être recherchée lorsque le paramètre tend vers une borne infinie ou une borne où la paramétrisation n'est pas définie.

Si

$$x(t) \longrightarrow \pm\infty \quad \text{et} \quad y(t) \longrightarrow \ell \in \mathbb{R},$$

alors la droite $y = \ell$ est une asymptote horizontale.

Pour une asymptote oblique $y = ax + b$, on peut rechercher des limites finies vérifiant

$$\frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow a, \qquad y(t) - ax(t) \longrightarrow b,$$

lorsque $|x(t)| \to \infty$.

Ces critères doivent être appliqués à chaque branche de la courbe, car les limites peuvent dépendre du sens dans lequel le paramètre tend vers la borne.

5 Exemples fondamentaux

5.1 Le cercle

Considérons

$$\begin{cases} x(t) = R\cos t, \\ y(t) = R\sin t, \end{cases} \qquad R > 0.$$

On a

$$x'(t) = -R\sin t, \qquad y'(t) = R\cos t.$$

Ainsi,

$$M'(t) = (-R\sin t, R\cos t)$$

et

$$\|M'(t)\| = R.$$

La courbe est régulière en tout point et sa vitesse est constante. Au paramètre t, la tangente est

$$-\sin t\,(x - R\cos t) - \cos t\,(y - R\sin t) = 0,$$

ce qui se simplifie en

$$x\cos t + y\sin t = R.$$

Le cercle constitue un exemple simple où la représentation paramétrique facilite l'étude du sens de parcours et des tangentes.

5.2 L'ellipse

Pour $a, b > 0$, considérons

$$x(t) = a\cos t, \qquad y(t) = b\sin t.$$

L'élimination du paramètre donne

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les dérivées sont

$$x'(t) = -a\sin t, \qquad y'(t) = b\cos t.$$

Elles ne s'annulent jamais simultanément. L'ellipse est donc une courbe régulière. Aux extrémités des axes, la formule de tangente vectorielle permet de traiter sans difficulté les tangentes verticales ou horizontales.

5.3 La cycloïde

La cycloïde est la trajectoire d'un point fixé sur un cercle de rayon R roulant sans glisser sur une droite. Une représentation est

$$\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t), \\ y(t) = R(1 - \cos t), \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

On obtient

$$x'(t) = R(1 - \cos t), \qquad y'(t) = R\sin t.$$

Le vecteur dérivé s'annule lorsque $t = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Ces paramètres correspondent aux points de rebroussement de la cycloïde.

Sur un intervalle $[0, 2\pi]$, la courbe part de l'origine, atteint la hauteur maximale $2R$ au paramètre $t = \pi$, puis revient sur l'axe des abscisses au point $(2\pi R, 0)$. Cet exemple illustre l'intérêt de la représentation paramétrique pour décrire un mouvement et identifier des singularités.

6 Applications et interprétations

6.1 Cinématique

Lorsqu'un point matériel se déplace dans le plan, ses coordonnées peuvent dépendre du temps :

$$M(t) = (x(t), y(t)).$$

Le vecteur vitesse est

$$\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$$

et le vecteur accélération est

$$\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t)).$$

La vitesse scalaire vaut

$$v(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

La représentation paramétrique fournit donc une description naturelle du mouvement, du sens de parcours et des variations de vitesse.

6.2 Longueur d'un arc

Si la courbe est de classe C^1 sur $[a, b]$, sa longueur, comptée avec le parcours, est

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\ dt.$$

Cette formule suppose une paramétrisation suffisamment régulière pour que l'intégrale soit définie. Si la courbe est parcourue plusieurs fois, la longueur ainsi calculée compte les passages successifs.

Exemple 6.1. Pour le cercle de rayon R paramétré sur $[0, 2\pi]$, on a $\|M'(t)\| = R$, d'où

$$L = \int_0^{2\pi} R\ dt = 2\pi R.$$

6.3 Changement de paramètre

Soit $\varphi : J \to I$ une fonction dérivable. La paramétrisation composée

$$\widetilde{M}(u) = M(\varphi(u))$$

a pour vecteur dérivé

$$\widetilde{M}'(u) = M'(\varphi(u))\varphi'(u).$$

Si φ est bijective et suffisamment régulière, elle permet généralement de modifier la vitesse de parcours sans changer l'image géométrique. Si elle n'est pas bijective, la courbe peut être parcourue plusieurs fois ou seulement en partie.

7 Exercices proposés

Les exercices suivants permettent de vérifier la maîtrise des définitions, des calculs de dérivées, des tangentes et du tracé des courbes.

Exercice 7.1 (Parabole)**.** On considère

$$x(t) = t, \qquad y(t) = t^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

a) Déterminer une équation cartésienne.

b) Calculer le vecteur dérivé.

c) Déterminer l'équation de la tangente au paramètre t_0.

d) Étudier les variations des coordonnées et tracer la courbe en indiquant le sens de parcours.

Exercice 7.2 (Ellipse)**.** On considère

$$x(t) = 3\cos t, \qquad y(t) = 2\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Établir l'équation cartésienne.

b) Montrer que la courbe est régulière.

c) Déterminer les tangentes aux extrémités des axes.

d) Calculer la longueur de l'arc paramétré, ou expliquer pourquoi son expression intégrale ne se simplifie pas en général en une primitive élémentaire.

Exercice 7.3 (Point stationnaire)**.** On considère

$$x(t) = t^2, \qquad y(t) = t^3.$$

a) Déterminer l'équation cartésienne et le domaine correspondant.

b) Déterminer les paramètres stationnaires.

c) Étudier la nature du point obtenu pour $t = 0$.

d) Déterminer la tangente limite en ce point.

Exercice 7.4 (Cycloïde)**.** On considère la représentation

$$x(t) = t - \sin t, \qquad y(t) = 1 - \cos t.$$

a) Calculer les dérivées et rechercher les paramètres stationnaires.

b) Étudier les variations sur $[0, 2\pi]$.

c) Déterminer les tangentes aux points réguliers.

d) Étudier le comportement au voisinage des extrémités de cet intervalle.

Exercice 7.5 (Point double)**.** On considère

$$x(t) = \sin t, \qquad y(t) = \sin(2t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Déterminer une équation cartésienne de la courbe.

b) Rechercher les points atteints pour plusieurs valeurs du paramètre.

c) Déterminer les tangentes aux points concernés.

d) Construire un tracé en tenant compte du sens de parcours.

Exercice 7.6 (Longueur d'un arc)**.** On considère

$$x(t) = t, \qquad y(t) = \frac{t^2}{2}, \qquad t \in [0, 1].$$

a) Calculer la vitesse scalaire.

b) Écrire l'intégrale donnant la longueur de l'arc.

c) Déterminer si cette longueur possède une expression élémentaire et proposer une méthode de calcul ou d'approximation.

Exercice 7.7 (Changement de paramètre)**.** On considère le cercle unité

$$M(t) = (\cos t, \sin t).$$

a) Étudier la paramétrisation $\widetilde{M}(u) = (\cos(2u), \sin(2u))$.

b) Comparer les images et les vitesses des deux paramétrisations sur $[0, 2\pi]$.

c) Expliquer la différence entre image géométrique et parcours paramétré.

8 Éléments de correction des exercices

Exercice 1

On obtient $y = x^2$ et $M'(t) = (1, 2t)$. La tangente au paramètre t_0 est

$$y = 2t_0 x - t_0^2.$$

La coordonnée x est strictement croissante ; la coordonnée y décroît sur $]-\infty, 0]$ puis croît sur $[0, +\infty[$.

Exercice 2

L'équation est

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Le vecteur dérivé est

$$M'(t) = (-3\sin t, 2\cos t),$$

qui ne s'annule jamais. Aux points $(3, 0)$ et $(-3, 0)$, les tangentes sont verticales ; aux points $(0, 2)$ et $(0, -2)$, elles sont horizontales.

Exercice 3

L'équation cartésienne est $y^2 = x^3$, avec $x \geq 0$. Le vecteur dérivé $(2t, 3t^2)$ s'annule pour $t = 0$. Au voisinage de l'origine, $y/x = t$ pour $t \neq 0$: la tangente limite est donc l'axe des abscisses.

Exercice 4

On a

$$x'(t) = 1 - \cos t, \qquad y'(t) = \sin t.$$

Le vecteur dérivé s'annule pour $t = 0$ et $t = 2\pi$ sur l'intervalle considéré. La coordonnée x est croissante et la coordonnée y croît jusqu'à π, puis décroît. Les extrémités sont des points de rebroussement de la cycloïde.

Exercice 5

Comme $y = 2\sin t \cos t$, on obtient

$$y^2 = 4x^2(1 - x^2), \qquad -1 \leq x \leq 1.$$

La recherche des points multiples revient à résoudre simultanément $\sin t_1 = \sin t_2$ et $\sin(2t_1) = \sin(2t_2)$. Il faut comparer les tangentes obtenues par les vecteurs dérivés

$$M'(t) = (\cos t, 2\cos(2t)).$$

Exercice 6

La vitesse scalaire est

$$v(t) = \sqrt{1 + t^2}.$$

La longueur vaut

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + t^2}\, dt = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})\right).$$

Exercice 7

Les deux paramétrisations ont pour image le cercle unité. La seconde parcourt le cercle deux fois sur $[0, 2\pi]$, avec une vitesse scalaire égale à 2, contre 1 pour la première.

9 Conclusion

Les équations paramétriques offrent une méthode puissante pour décrire les courbes planes, en particulier lorsqu'une équation cartésienne est difficile à obtenir ou lorsqu'il importe de conserver le sens de parcours.

L'étude repose principalement sur les fonctions coordonnées, leurs limites et leurs dérivées. Elle permet de déterminer les tangentes, de repérer les points stationnaires, d'étudier les variations et de construire un tracé raisonné.

La leçon met également en évidence les liens entre analyse, géométrie et cinématique. Les exemples du cercle, de l'ellipse, de la parabole et de la cycloïde illustrent des situations allant de la régularité la plus simple aux singularités locales.

À l'oral du CAPES, il est essentiel de distinguer l'image géométrique d'une courbe et sa paramétrisation, de justifier les calculs de tangente et de signaler les hypothèses de régularité utilisées.

Références

[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, Paris.

[2] François Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, Paris.

[3] Jean-Marie Monier, *Analyse MP*, Dunod, Paris.

[4] Henri Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris.

[5] Jean-Pierre Ramis, André Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques tout-en-un pour la Licence*, Dunod, Paris.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes officiels de mathématiques des classes préparatoires et du lycée*, Bulletin officiel et ressources Éduscol, https://www.education.gouv.fr/ et https://eduscol.education.fr/.

[7] Ministère de l'Éducation nationale, *Concours du CAPES externe de mathématiques : programmes et rapports de jury*, site officiel Devenir enseignant, https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.