# Intégrales et primitives

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

---

## Table des matières


**1 Prérequis et objectifs** **2**

1.1 Prérequis . . . 2

1.2 Objectifs . . . 2

**2 Primitives d'une fonction** **2**

2.1 Définition . . . 2

2.2 Unicité à une constante près . . . 3

2.3 Existence des primitives . . . 3

**3 Calcul des primitives** **3**

3.1 Tableau des primitives usuelles . . . 3

3.2 Linéarité . . . 4

3.3 Primitives de fonctions composées . . . 5

**4 Définition de l'intégrale** **5**

4.1 Intégrale d'une fonction continue . . . 5

4.2 Interprétation géométrique . . . 5

**5 Propriétés fondamentales de l'intégrale** **6**

5.1 Relation de Chasles . . . 6

5.2 Linéarité . . . 6

5.3 Positivité et croissance . . . 6

5.4 Encadrement . . . 6

5.5 Valeur moyenne . . . 7

**6 Théorème fondamental de l'analyse** **7**

6.1 Construction d'une primitive par intégration . . . 7

6.2 Formule de Newton–Leibniz . . . 7

6.3 Exemples de calcul . . . 8

**7 Techniques de calcul intégral** **8**

7.1 Intégration par parties . . . 8

7.2 Changement de variable . . . 9

7.3 Symétrie . . . 9

**8 Applications** **9**

8.1 Calcul d'aires entre deux courbes . . . . . 9

8.2 Distance parcourue . . . . . 10

8.3 Accumulation d'une quantité . . . . . 10

8.4 Équations différentielles simples . . . . . 10

**9 Exercices** **10**

9.1 Primitives usuelles . . . . . 10

9.2 Calcul intégral . . . . . 11

9.3 Techniques de calcul . . . . . 11

9.4 Propriétés et démonstrations . . . . . 11

9.5 Applications . . . . . 11

9.6 Exercice de synthèse . . . . . 12

**10 Éléments de correction** **12**

**11 Points de vigilance pour l'oral** **13**

**12 Références bibliographiques** **14**

# 1 Prérequis et objectifs

## 1.1 Prérequis

La leçon s'appuie sur les notions suivantes :

- fonctions réelles d'une variable réelle ;
- continuité sur un intervalle ;
- dérivée d'une fonction et règles de dérivation ;
- fonctions usuelles : puissances, exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques ;
- calcul algébrique et résolution d'équations ;
- lecture graphique et interprétation géométrique des fonctions.

## 1.2 Objectifs

L'objectif est de comprendre le lien entre dérivation et intégration, puis de savoir calculer et interpréter des intégrales.

À l'issue de cette leçon, on doit être capable :

- de définir une primitive d'une fonction ;
- d'établir l'existence de primitives dans les situations usuelles ;
- d'utiliser le théorème fondamental de l'analyse ;
- de calculer une intégrale à l'aide d'une primitive ;
- d'interpréter une intégrale comme une aire algébrique ;
- d'utiliser la linéarité, l'additivité et la positivité de l'intégrale ;
- de mettre en oeuvre une intégration par parties ou un changement de variable ;
- de résoudre des problèmes faisant intervenir une accumulation de quantités.

# 2 Primitives d'une fonction

## 2.1 Définition

**Définition 2.1.** Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Une primitive de $f$ sur $I$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in I, \qquad F'(x) = f(x).$$

La recherche d'une primitive constitue le problème réciproque de la dérivation : connaissant $f$, on cherche une fonction dont la dérivée est $f$.

**Exemple 2.2.** Une primitive de $f(x) = 3x^2$ sur $\mathbb{R}$ est

$$F(x) = x^3,$$

car $F'(x) = 3x^2$.

**Exemple 2.3.** Sur $]0, +\infty[$, une primitive de $x \mapsto 1/x$ est la fonction logarithme népérien :

$$F(x) = \ln x.$$

### 2.2 Unicité à une constante près

**Théorème 2.4.** *Soient $F$ et $G$ deux primitives d'une même fonction $f$ sur un intervalle $I$. Alors il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que*

$$\forall x \in I, \qquad F(x) = G(x) + C.$$

**Démonstration.** La fonction $H = F - G$ est dérivable sur $I$ et vérifie

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Une fonction dérivable dont la dérivée est nulle sur un intervalle est constante. Il existe donc $C \in \mathbb{R}$ tel que $H(x) = C$, ce qui donne le résultat.

**Corollaire 2.5.** *Si $F$ est une primitive de $f$ sur $I$, alors toutes les primitives de $f$ sur $I$ sont de la forme*

$$x \longmapsto F(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

La condition $F(x_0) = y_0$, pour un point $x_0 \in I$, détermine une unique primitive :

$$F(x) = F_0(x) - F_0(x_0) + y_0,$$

où $F_0$ est une primitive quelconque de $f$.

### 2.3 Existence des primitives

**Théorème 2.6** (Théorème d'existence)**.** *Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.*

Ce résultat est fondamental : il garantit que le problème consistant à rechercher une primitive possède une solution, même si celle-ci ne peut pas toujours s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

*Remarque* 2.7. L'existence d'une primitive ne signifie pas que celle-ci admet une expression élémentaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ possède des primitives sur $\mathbb{R}$, mais celles-ci ne s'expriment pas à l'aide des fonctions élémentaires usuelles.

## 3 Calcul des primitives

### 3.1 Tableau des primitives usuelles

Dans le tableau suivant, $C$ désigne une constante réelle. Les domaines de définition doivent être respectés.

| Fonction $f(x)$ | Une primitive |
|---|---|
| $x^n,\ n \neq -1$ | $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ |
| $\dfrac{1}{x},\ x > 0$ | $\ln x$ |
| $\dfrac{1}{x},\ x < 0$ | $\ln \lvert x \rvert$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $\cos x$ | $\sin x$ |
| $\sin x$ | $-\cos x$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\arctan x$ |
| $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \lvert x \rvert < 1$ | $\arcsin x$ |

Plus généralement, pour $a \neq 0$,

$$\int e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C,$$

et, sur un intervalle où $ax + b > 0$,

$$\int \frac{a}{ax+b}\,\mathrm{d}x = \ln(ax+b) + C.$$

Pour une puissance composée, lorsque $a \neq 0$ et $n \neq -1$,

$$\int (ax+b)^n\,\mathrm{d}x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + C,$$

sur tout intervalle où l'expression est définie.

## 3.2 Linéarité

**Proposition 3.1.** *Si $F$ est une primitive de $f$, $G$ une primitive de $g$, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors*

$$\lambda F + \mu G$$

*est une primitive de $\lambda f + \mu g$.*

Cette propriété permet de décomposer les fonctions en sommes de termes dont les primitives sont connues.

**Exemple 3.2.** Pour déterminer une primitive de

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 2e^x,$$

on intègre chaque terme :

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + 2e^x + C.$$

### 3.3 Primitives de fonctions composées

**Proposition 3.3.** *Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$. Si $F$ est une primitive de $f$ sur un intervalle contenant $u(I)$, alors*

$$(F \circ u)'(x) = f(u(x))u'(x).$$

*Ainsi, une primitive de $f(u(x))u'(x)$ est*

$$F(u(x)).$$

**Exemple 3.4.** Pour $u(x) = x^2 + 1$, on obtient

$$\int 2xe^{x^2+1}\,\mathrm{d}x = e^{x^2+1} + C.$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^2+1} = 2xe^{x^2+1}.$$

**Exemple 3.5.** Sur $]0, +\infty[$,

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+1) + C.$$

## 4 Définition de l'intégrale

### 4.1 Intégrale d'une fonction continue

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \leq b$, et $f$ une fonction continue sur $[a, b]$.

L'intégrale de $f$ sur $[a, b]$, notée

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

représente une accumulation algébrique des valeurs de $f$ sur cet intervalle.

Au niveau de l'analyse, cette intégrale peut être définie comme une limite de sommes de Riemann :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

Cette formule utilise une subdivision régulière de $[a, b]$. La continuité de $f$ assure l'existence de cette limite.

### 4.2 Interprétation géométrique

Si $f$ est positive sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de $f$, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$.

L'aire est exprimée en unités d'aire.

Si $f$ change de signe, l'intégrale est une aire algébrique : les parties situées au-dessus de l'axe des abscisses contribuent positivement, tandis que celles situées en dessous contribuent négativement.

En particulier,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_-,$$

où $\mathcal{A}_+$ et $\mathcal{A}_-$ désignent les aires géométriques correspondantes.

*Remarque* 4.1. Une intégrale n'est donc pas toujours une aire géométrique positive. Pour calculer l'aire totale entre la courbe et l'axe des abscisses, on utilise

$$\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

# 5 Propriétés fondamentales de l'intégrale

## 5.1 Relation de Chasles

**Proposition 5.1.** *Pour toute fonction continue $f$ sur un intervalle contenant $a$, $b$ et $c$,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

*Cette relation reste valable lorsque les bornes sont dans un ordre quelconque.*

En particulier,

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{et} \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 5.2 Linéarité

**Proposition 5.2.** *Si $f$ et $g$ sont continues sur $[a,b]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors*

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \mu g(x))\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \mu \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 5.3 Positivité et croissance

**Proposition 5.3.** *Si $f$ est continue et positive sur $[a,b]$, alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

**Proposition 5.4.** *Si $f$ et $g$ sont continues sur $[a,b]$ et si*

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) \leq g(x),$$

*alors*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

## 5.4 Encadrement

**Proposition 5.5.** *Si $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in [a,b]$, avec $a \leq b$, alors*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq M(b-a).$$

**Corollaire 5.6.** *Pour toute fonction continue $f$ sur $[a,b]$,*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

*En particulier, si $|f(x)| \leq M$, alors*

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M(b-a).$$

### 5.5 Valeur moyenne

**Théorème 5.7** (Théorème de la moyenne)**.** *Si $f$ est continue sur $[a,b]$, avec $a < b$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

On appelle valeur moyenne de $f$ sur $[a,b]$ le nombre

$$\boxed{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Ce résultat permet de relier l'intégrale à une valeur prise par la fonction sur l'intervalle.

## 6 Théorème fondamental de l'analyse

### 6.1 Construction d'une primitive par intégration

**Théorème 6.1.** *Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. On fixe $a \in I$ et on définit*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

*Alors $F$ est dérivable sur $I$ et*

$$F'(x) = f(x).$$

Cette formulation établit un lien direct entre l'intégrale et la dérivée. Elle montre notamment que l'intégration permet de construire une primitive.

### 6.2 Formule de Newton–Leibniz

**Théorème 6.2.** *Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, et soit $F$ une primitive de $f$ sur cet intervalle. Alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}.$$

On note parfois

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

**Démonstration.** La fonction

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

est une primitive de $f$. Puisque $F$ est également une primitive de $f$, le théorème d'unicité des primitives assure que $G - F$ est constante. En évaluant en $a$, on obtient

$$G(a) - F(a) = -F(a).$$

Il en résulte que

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a),$$

donc

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

### 6.3 Exemples de calcul

**Exemple 6.3.** Calculons

$$I = \int_0^2 (3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive est $F(x) = x^3 + x$. Ainsi,

$$I = [x^3 + x]_0^2 = (8 + 2) - 0 = 10.$$

**Exemple 6.4.** Calculons

$$J = \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x.$$

Une primitive est $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$. Par conséquent,

$$J = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2 - 1}{2}.$$

**Exemple 6.5.** Calculons

$$K = \int_1^e \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Sur $]0, +\infty[$, une primitive est $\ln x$. Donc

$$K = [\ln x]_1^e = 1 - 0 = 1.$$

## 7 Techniques de calcul intégral

### 7.1 Intégration par parties

**Théorème 7.1** (Intégration par parties)**.** *Soient $u$ et $v$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x}.$$

Cette formule découle de la dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

**Exemple 7.2.** Calculons

$$I = \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x.$$

On choisit $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. Alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. D'où

$$I = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e - (e - 1) = 1.$$

### 7.2 Changement de variable

**Théorème 7.3** (Changement de variable)**.** *Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha, \beta]$, et soit $f$ continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha, \beta])$. Alors*

$$\boxed{\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}.$$

La formule s'applique aussi lorsque $\varphi$ est décroissante : les bornes doivent alors être conservées dans l'ordre indiqué par la formule.

**Exemple 7.4.** Calculons

$$I = \int_0^1 2x\cos(x^2)\,\mathrm{d}x.$$

Avec le changement de variable $u = x^2$, on a $\mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x$, et les bornes deviennent 0 et 1. Ainsi,

$$I = \int_0^1 \cos u\,\mathrm{d}u = [\sin u]_0^1 = \sin 1.$$

### 7.3 Symétrie

Si $f$ est paire et continue sur $[-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Si $f$ est impaire et continue sur $[-a, a]$, alors

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ces propriétés permettent de simplifier de nombreux calculs.

## 8 Applications

### 8.1 Calcul d'aires entre deux courbes

Soient $f$ et $g$ continues sur $[a, b]$, avec $f(x) \geq g(x)$ sur cet intervalle. L'aire du domaine compris entre leurs courbes et les droites verticales $x = a$ et $x = b$ est

$$\boxed{\mathcal{A} = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x}.$$

Si les courbes se croisent, il faut découper l'intervalle aux points d'intersection ou utiliser

$$\mathcal{A} = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

**Exemple 8.1.** Calculons l'aire comprise entre les courbes de $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$ sur $[0, 1]$. Comme $x \geq x^2$ sur cet intervalle,

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

### 8.2 Distance parcourue

Si $v(t)$ représente la vitesse algébrique d'un mobile, alors son déplacement entre les instants $a$ et $b$ est

$$\Delta x = \int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

La distance totale parcourue est

$$d = \int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Il convient donc de distinguer déplacement et distance : ils ne coïncident pas nécessairement lorsque la vitesse change de signe.

### 8.3 Accumulation d'une quantité

Si $r(t)$ désigne un débit instantané, la quantité accumulée entre $a$ et $b$ est, sous les hypothèses appropriées,

$$Q = \int_a^b r(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette interprétation s'applique notamment aux volumes, aux masses, aux charges électriques et aux coûts cumulés.

### 8.4 Équations différentielles simples

La recherche d'une primitive intervient dans la résolution de certaines équations différentielles. Par exemple,

$$y'(x) = f(x)$$

admet pour solutions les fonctions

$$y(x) = F(x) + C,$$

où $F$ est une primitive de $f$.

La condition initiale $y(x_0) = y_0$ détermine la constante :

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

## 9 Exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés à l'oral, avec une progression allant du calcul direct à l'étude de propriétés générales.

### 9.1 Primitives usuelles

**Exercice 9.1.** Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = 4x^3 - 6x + 2, \qquad g(x) = 3e^x - 2\sin x.$$

**Exercice 9.2.** Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes sur un intervalle adapté :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3}, \qquad g(x) = \frac{1}{2x+1}, \qquad h(x) = xe^{x^2}.$$

Préciser les domaines de définition.

## 9.2 Calcul intégral

**Exercice 9.3.** Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_0^1 (2x+3)\,\mathrm{d}x, \qquad I_2 = \int_0^{\ln 2} e^x\,\mathrm{d}x,$$
$$I_3 = \int_1^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad I_4 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice 9.4.** Soit $f(x) = x^2 - 2x$ sur $[0,2]$.

a) Calculer $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
b) Étudier le signe de $f$ sur $[0,2]$.
c) Interpréter géométriquement le résultat.
d) Calculer l'aire géométrique comprise entre la courbe et l'axe des abscisses.

## 9.3 Techniques de calcul

**Exercice 9.5.** Calculer, à l'aide d'une intégration par parties,

$$I = \int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

**Exercice 9.6.** À l'aide d'un changement de variable, calculer

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x.$$

## 9.4 Propriétés et démonstrations

**Exercice 9.7.** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,b]$, avec $a < b$, et supposons que

$$m \le f(x) \le M.$$

Démontrer que

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a).$$

Interpréter cette inégalité géométriquement lorsque $f$ est positive.

**Exercice 9.8.** Soit $f$ une fonction continue sur $[0,1]$, et soit

$$F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $F$ est dérivable et calculer $F'$.
b) Que peut-on conclure si $f \ge 0$ ?
c) Étudier le cas $f(x) = x^2$.

## 9.5 Applications

**Exercice 9.9.** Déterminer l'aire du domaine compris entre les courbes $y = x$ et $y = x^2$ sur $[0,1]$. Représenter schématiquement la situation et justifier le signe de l'intégrande.

**Exercice 9.10.** La vitesse algébrique d'un mobile est donnée par

$$v(t) = t - 2, \qquad t \in [0,4].$$

Calculer le déplacement du mobile et la distance totale parcourue pendant cet intervalle. Expliquer pourquoi ces deux grandeurs diffèrent.

### 9.6 Exercice de synthèse

**Exercice 9.11.** Soit $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0, +\infty[$.

a) Étudier les variations de $f$.
b) Calculer $\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x$, pour $A > 0$, à l'aide d'une intégration par parties.
c) Déterminer la limite de cette intégrale lorsque $A \to +\infty$.
d) Interpréter le résultat comme une intégrale impropre convergente.

## 10 Éléments de correction

Cette section donne quelques résultats permettant de vérifier les calculs des exercices.

### Exercice 1

Les primitives sont respectivement

$$F(x) = x^4 - 3x^2 + 2x + C,$$

et

$$G(x) = 3e^x + 2\cos x + C.$$

### Exercice 2

Sur $\mathbb{R}$, une primitive de $2x/(x^2+3)$ est

$$\ln(x^2 + 3) + C.$$

Sur chacun des intervalles où $2x + 1 \neq 0$, une primitive de $1/(2x+1)$ est

$$\frac{1}{2}\ln|2x + 1| + C.$$

Une primitive de $xe^{x^2}$ est

$$\frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

### Exercice 3

Les résultats sont

$$I_1 = 4, \qquad I_2 = 1, \qquad I_3 = \ln 2, \qquad I_4 = 1.$$

### Exercice 4

On obtient

$$\int_0^2 (x^2 - 2x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = -\frac{4}{3}.$$

La fonction est négative sur $]0, 2[$. L'aire géométrique vaut donc $4/3$.

### Exercice 5

Une intégration par parties donne

$$I = \frac{1}{4}.$$

### Exercice 6

Avec $u = 1 + x^2$, on obtient

$$I = \int_1^2 \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \left[-\frac{1}{u}\right]_1^2 = \frac{1}{2}.$$

### Exercice 9

L'aire recherchée est

$$\int_0^1 (x - x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}.$$

### Exercice 10

Le déplacement vaut

$$\int_0^4 (t-2)\,\mathrm{d}t = 0.$$

La distance totale vaut

$$\int_0^4 |t-2|\,\mathrm{d}t = 4.$$

### Exercice 11

Une intégration par parties conduit à

$$\int_0^A xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1 - (A+1)e^{-A}.$$

Comme $(A+1)e^{-A} \to 0$, l'intégrale impropre converge et sa valeur est

$$\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

## 11 Points de vigilance pour l'oral

Lors de la présentation, il est utile d'insister sur les distinctions suivantes :

- Une primitive est une fonction ; une intégrale définie est un nombre.
- L'intégrale définie est indépendante du choix de la primitive utilisée dans la formule de Newton–Leibniz.
- Une intégrale peut être négative, contrairement à une aire géométrique.
- L'existence d'une primitive n'implique pas qu'elle soit exprimable à l'aide des fonctions usuelles.
- Les hypothèses de continuité doivent être vérifiées avant d'appliquer les théorèmes.
- Les bornes et les domaines de définition doivent être adaptés lors d'un changement de variable.

— Une intégrale impropre, dont une borne est infinie ou dont l'intégrande présente une singularité, demande une étude de convergence distincte.

Pour l'oral, une progression efficace consiste à partir de la dérivation, à introduire les primitives, puis à présenter l'intégrale et le théorème fondamental avant d'aborder les techniques de calcul et les applications.

## 12 Références bibliographiques

## Références


[1] Xavier Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses. Ouvrage de travail pour approfondir les notions d'analyse, les théorèmes fondamentaux et les techniques de calcul.

[2] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI*, Dunod. Référence pour les primitives, l'intégration et les raisonnements d'analyse à un niveau post-baccalauréat.

[3] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill. Référence théorique pour les fondements de l'analyse réelle et les théorèmes d'intégration.

[4] James Stewart, *Calculus : Early Transcendentals*, Cengage Learning. Présentation progressive des primitives, des intégrales et de leurs applications géométriques et physiques.

[5] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*. Les programmes et ressources officielles sont consultables sur le site Éduscol : https://eduscol.education.fr/.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Rapports de jury du CAPES externe de mathématiques*. Les rapports précisent les attentes de l'épreuve orale et les exigences de rigueur, de pédagogie et de maîtrise scientifique. Ils sont consultables sur le site officiel devenirenseignant.gouv.fr : https://www.devenirenseignant.gouv.fr/.