Techniques de calcul d'intégrales

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Cadre général **2**
- 2.1 Intégrale d'une fonction continue . . . 2
- 2.2 Propriétés fondamentales . . . 2

3 Reconnaître une primitive **3**
- 3.1 Primitives usuelles . . . 3
- 3.2 Reconnaissance d'une dérivée composée . . . 3

4 Changement de variable **3**
- 4.1 Principe . . . 3
- 4.2 Exemple : changement polynomial . . . 4
- 4.3 Exemple : changement logarithmique . . . 4
- 4.4 Choisir un changement pertinent . . . 4

5 Intégration par parties **4**
- 5.1 Formule . . . 4
- 5.2 Exemple : intégrale logarithmique . . . 5
- 5.3 Exemple : produit exponentiel-polynôme . . . 5
- 5.4 Choix des facteurs . . . 5

6 Décomposition en éléments simples **6**
- 6.1 Principe . . . 6
- 6.2 Exemple . . . 6
- 6.3 Formes usuelles . . . 6

7 Intégrales trigonométriques **7**
- 7.1 Identités et symétries . . . 7
- 7.2 Puissances de sinus et cosinus . . . 7
- 7.3 Exemple . . . 7

8 Formules de réduction **7**
- 8.1 Puissances de sinus . . . 8
- 8.2 Intégrales exponentielles-polynomiales . . . 8

9 Intégrales impropres : précautions **8**

10 Stratégie de résolution **9**

11 Liste d'exercices **9**
11.1 Exercice 1 : primitives usuelles 9
11.2 Exercice 2 : reconnaissance d'une dérivée composée 9
11.3 Exercice 3 : changement de variable 9
11.4 Exercice 4 : intégration par parties 10
11.5 Exercice 5 : fractions rationnelles 10
11.6 Exercice 6 : intégrales trigonométriques 10
11.7 Exercice 7 : symétrie 10
11.8 Exercice 8 : intégrales impropres 10
11.9 Exercice 9 : exercice de synthèse 10
11.10Éléments de correction 11

12 Conclusion **11**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de continuité, de dérivabilité et de primitive d'une fonction réelle. On utilise les formules usuelles de dérivation, les fonctions trigonométriques, exponentielles et logarithmes, ainsi que les identités algébriques élémentaires. La linéarité de l'intégrale et le théorème fondamental de l'analyse sont également nécessaires.

Objectifs. L'objectif est de présenter les principales techniques de calcul exact d'intégrales sur un intervalle réel : reconnaissance d'une primitive, changement de variable, intégration par parties, décomposition en éléments simples et réduction de certaines intégrales trigonométriques. Il s'agit également de savoir choisir une méthode adaptée, d'en vérifier les hypothèses et de comprendre les situations dans lesquelles une primitive élémentaire n'est pas disponible.

2 Cadre général

2.1 Intégrale d'une fonction continue

Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Son intégrale sur $[a, b]$ est notée

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Elle peut être interprétée comme une aire algébrique : les portions situées au-dessus de l'axe des abscisses comptent positivement et celles situées en dessous négativement.

Théorème 2.1 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Si f est continue sur $[a, b]$ et si F est une primitive de f sur cet intervalle, alors*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).}$$

Ce résultat ramène le calcul d'une intégrale à la recherche d'une primitive. Les techniques étudiées dans cette leçon permettent précisément de construire ou de reconnaître de telles primitives.

2.2 Propriétés fondamentales

Pour des fonctions continues f, g et des réels λ, μ, on dispose de la linéarité :

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

Pour $a \le c \le b$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Enfin, si $f(x) \ge 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(x)\,dx \ge 0.$$

Ces propriétés simplifient souvent le problème avant même d'entreprendre un calcul de primitive.

3 Reconnaître une primitive

3.1 Primitives usuelles

Les formules usuelles sont le premier outil à mobiliser. Sur les intervalles où les expressions sont définies, on a notamment :

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1,$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C,$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C,$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C.$$

3.2 Reconnaissance d'une dérivée composée

Une forme importante est

$$f'(x)\,\varphi(f(x)).$$

Si Φ est une primitive de φ, alors

$$\frac{d}{dx}\Phi(f(x)) = f'(x)\varphi(f(x)).$$

On obtient donc

$$\boxed{\int f'(x)\varphi(f(x))\,dx = \Phi(f(x)) + C.}$$

Exemple 3.1. Calculons

$$I = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx.$$

Le numérateur est la dérivée du dénominateur. On reconnaît

$$\Big(\ln(1+x^2)\Big)' = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Par conséquent,

$$I = \Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \ln 2.$$

Remarque 3.2. Avant d'utiliser une méthode plus élaborée, il convient de rechercher une dérivée composée évidente. Cette reconnaissance évite des calculs inutiles.

4 Changement de variable

4.1 Principe

Théorème 4.1 (Changement de variable)**.** *Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit f une fonction continue sur un intervalle contenant $\varphi([\alpha, \beta])$. Alors*

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,dx.}$$

On peut aussi lire cette formule dans le sens inverse : si l'intégrale contient une expression composée, on pose $x = \varphi(t)$ et l'on transforme simultanément l'intégrande et les bornes.

4.2 Exemple : changement polynomial

Calculons

$$I = \int_0^1 2xe^{x^2}\,dx.$$

Posons $u = x^2$. Alors $du = 2x\,dx$. Lorsque $x = 0$, $u = 0$; lorsque $x = 1$, $u = 1$. Ainsi,

$$I = \int_0^1 e^u\,du = [e^u]_0^1 = \boxed{e - 1}.$$

4.3 Exemple : changement logarithmique

Calculons

$$J = \int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Posons $u = \ln x$. Alors $du = dx/x$. Les bornes deviennent $u = 0$ et $u = 1$, d'où

$$J = \int_0^1 u\,du = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

4.4 Choisir un changement pertinent

Les substitutions suivantes sont fréquemment utiles :

— $u = ax + b$ pour une fonction affine ;

— $u = x^2$ lorsque l'intégrande contient $x\,dx$ et une expression en x^2 ;

— $u = \ln x$ lorsque dx/x apparaît ;

— $u = \sqrt{x}$ ou $u = x^2$ pour éliminer certaines expressions comportant des racines ;

— $u = \tan(x/2)$ pour certaines intégrales de fonctions rationnelles de $\sin x$ et $\cos x$.

Remarque 4.2. Un changement de variable doit transformer l'intégrale en une expression plus simple. Il faut toujours transformer les bornes si l'on conserve la nouvelle variable d'intégration.

5 Intégration par parties

5.1 Formule

Théorème 5.1 (Intégration par parties)**.** *Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors*

$$\boxed{\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.}$$

Cette formule découle directement de la dérivation d'un produit :

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Elle est utile lorsque l'intégrande est un produit et que la dérivation de l'un des facteurs simplifie l'expression.

5.2 Exemple : intégrale logarithmique

Calculons

$$I = \int_0^1 x \ln(1+x)\, dx.$$

On choisit

$$u(x) = \ln(1+x), \qquad v'(x) = x.$$

Alors

$$u'(x) = \frac{1}{1+x}, \qquad v(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Par intégration par parties,

$$I = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\, dx.$$

Or

$$\frac{x^2}{1+x} = x - 1 + \frac{1}{1+x}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) dx \\ &= \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 2\right) \\ &= \boxed{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

5.3 Exemple : produit exponentiel-polynôme

Calculons

$$I = \int_0^1 x e^x\, dx.$$

Avec $u = x$ et $v' = e^x$, on obtient

$$I = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\, dx.$$

Donc

$$I = e - (e-1) = \boxed{1}.$$

5.4 Choix des facteurs

On privilégie généralement comme facteur à dériver :

— un logarithme ;

— un polynôme ;

— une fonction inverse trigonométrique.

L'autre facteur doit posséder une primitive simple. Cette règle est indicative et non systématique.

6 Décomposition en éléments simples

6.1 Principe

Une fraction rationnelle est un quotient

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

où P et Q sont des polynômes.

Lorsque le degré de P est inférieur à celui de Q, la décomposition en éléments simples permet, sur $\mathbb{R}$, d'exprimer R comme somme de termes dont les primitives sont connues.

Si le degré de P est supérieur ou égal à celui de Q, on effectue d'abord une division euclidienne.

6.2 Exemple

Calculons

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 - 1}\, dx.$$

Attention : l'intégrande n'est pas définie en $x = 1$. Cette intégrale n'est donc pas une intégrale propre sur $[0, 1]$. Elle est impropre et divergente, puisque

$$\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}\right)$$

et que le terme logarithmique diverge en 1.

Pour un exemple d'intégrale propre, considérons plutôt

$$J = \int_0^{1/2} \frac{1}{1 - x^2}\, dx.$$

On décompose :

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - x} + \frac{1}{1 + x}\right).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\left[-\ln(1 - x) + \ln(1 + x)\right]_0^{1/2} \\ &= \frac{1}{2}\ln 3. \end{aligned}$$

6.3 Formes usuelles

Les primitives suivantes sont fondamentales :

$$\int \frac{dx}{x - a} = \ln|x - a| + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x - a)^n} = \frac{(x - a)^{1-n}}{1 - n} + C, \qquad n \neq 1,$$

et

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, \qquad a > 0.$$

Pour un facteur quadratique irréductible, on cherche à compléter le carré afin de faire apparaître une forme liée à l'arctangente.

7 Intégrales trigonométriques

7.1 Identités et symétries

Les identités

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

permettent de transformer certaines expressions.

Pour une fonction paire f :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Pour une fonction impaire f :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Ces propriétés sont particulièrement utiles sur des intervalles symétriques.

7.2 Puissances de sinus et cosinus

Pour intégrer un produit de puissances de sinus et de cosinus, on distingue plusieurs situations :

— si la puissance de $\sin x$ est impaire, on isole un facteur $\sin x$ et l'on utilise $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$;

— si la puissance de $\cos x$ est impaire, on isole un facteur $\cos x$ et l'on utilise $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$;

— si les deux puissances sont paires, on peut employer les formules

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}, \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

7.3 Exemple

Calculons

$$I = \int_{0}^{\pi/2} \sin^3 x\,dx.$$

On écrit

$$\sin^3 x = \sin x(1 - \cos^2 x).$$

En posant $u = \cos x$, on a $du = -\sin x\,dx$. Les bornes deviennent 1 et 0, donc

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{1} (1 - u^2)\,du \\ &= \left[u - \frac{u^3}{3}\right]_{0}^{1} \\ &= \boxed{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

8 Formules de réduction

Certaines familles d'intégrales se ramènent à des intégrales de même nature, mais portant sur une puissance plus faible.

8.1 Puissances de sinus

Posons

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

Pour $n \geq 2$, une intégration par parties donne

$$\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.}$$

Les valeurs initiales sont

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad I_1 = 1.$$

Par exemple,

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 = \frac{\pi}{4}, \qquad I_3 = \frac{2}{3} I_1 = \frac{2}{3}.$$

Cette formule illustre comment une intégration par parties peut produire une relation de récurrence.

8.2 Intégrales exponentielles-polynomiales

Pour

$$J_n = \int x^n e^x \, dx,$$

l'intégration par parties fournit

$$J_n = x^n e^x - n J_{n-1}.$$

Cette relation permet de calculer successivement les primitives lorsque n est un entier naturel.

9 Intégrales impropres : précautions

Les méthodes précédentes doivent être adaptées lorsque l'intégrande n'est pas borné ou que l'intervalle est non borné.

Par exemple, pour une fonction continue sur $[a, b[$, on définit éventuellement

$$\int_a^b f(x) \, dx = \lim_{t \to b^-} \int_a^t f(x) \, dx,$$

si cette limite existe et est finie.

Il faut donc vérifier la convergence avant d'appliquer sans précaution les techniques usuelles.

Un exemple classique est

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx.$$

Cette intégrale converge si et seulement si $p > 1$, et dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} \, dx = \frac{1}{p-1}.$$

La décomposition en éléments simples ou une intégration par parties ne dispense jamais d'étudier les limites aux bornes singulières.

10 Stratégie de résolution

Pour calculer une intégrale, on peut suivre la démarche suivante :

1. Vérifier le domaine de définition et la continuité de l'intégrande sur l'intervalle.
2. Rechercher une primitive usuelle ou une dérivée composée.
3. Examiner la possibilité d'un changement de variable simple.
4. Si l'intégrande est un produit, envisager une intégration par parties.
5. Si l'intégrande est rationnelle, effectuer si nécessaire une division euclidienne puis une décomposition en éléments simples.
6. Pour une expression trigonométrique, rechercher une identité, une symétrie ou une formule de réduction.
7. Pour une intégrale impropre, étudier d'abord la convergence.
8. Calculer, simplifier et vérifier le résultat par dérivation de la primitive obtenue, ou par une estimation numérique si elle est disponible.

Aucune méthode n'est universelle. La compétence essentielle est de reconnaître la structure de l'intégrande et de choisir une transformation qui simplifie effectivement le calcul.

11 Liste d'exercices

Les exercices suivants sont classés par technique. Ils peuvent être proposés à l'oral, en préparation ou comme prolongement de la leçon.

11.1 Exercice 1 : primitives usuelles

Calculer :

$$I_1 = \int_0^1 (3x^2 - 2x + 1)\,dx,$$
$$I_2 = \int_1^e \frac{1}{x}\,dx,$$
$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \cos x\,dx,$$
$$I_4 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

11.2 Exercice 2 : reconnaissance d'une dérivée composée

Calculer :

$$I = \int_0^1 \frac{3x^2}{1+x^3}\,dx, \qquad J = \int_0^{\ln 2} e^x\sqrt{1+e^x}\,dx.$$

11.3 Exercice 3 : changement de variable

Calculer :

$$I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx, \qquad J = \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Indiquer précisément les changements de variable et les nouvelles bornes.

11.4 Exercice 4 : intégration par parties

Calculer :

$$I = \int_0^1 xe^{2x}\,dx, \qquad J = \int_1^e \ln x\,dx, \qquad K = \int_0^{\pi/2} x\cos x\,dx.$$

11.5 Exercice 5 : fractions rationnelles

Calculer :

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-x^2}\,dx, \qquad J = \int_0^1 \frac{x+2}{x^2+3x+2}\,dx.$$

Pour chaque intégrale, effectuer une décomposition en éléments simples lorsque cela est pertinent.

11.6 Exercice 6 : intégrales trigonométriques

Calculer :

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin^5 x\,dx, \qquad J = \int_0^{\pi/2} \cos^4 x\,dx.$$

On pourra comparer le calcul direct et l'utilisation d'une formule de réduction.

11.7 Exercice 7 : symétrie

Soit f une fonction continue sur $[-a, a]$. Montrer que :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

si f est paire, et que l'intégrale est nulle si f est impaire.

Appliquer ces résultats à

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin x\,dx.$$

11.8 Exercice 8 : intégrales impropres

Étudier la convergence et calculer, si possible,

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

en fonction du réel p.

Étudier également

$$J = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

11.9 Exercice 9 : exercice de synthèse

Calculer

$$I = \int_0^1 x^2 \ln(1+x)\,dx.$$

Préciser la méthode choisie, justifier les transformations effectuées et proposer une seconde méthode si elle existe.

11.10 Éléments de correction

1. Exercice 1 :
$$I_1 = 1, \qquad I_2 = 1, \qquad I_3 = 1, \qquad I_4 = \frac{\pi}{4}.$$
2. Exercice 2 :
$$I = \ln 2, \qquad J = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{3} - \sqrt{2}\right).$$
3. Exercice 3 :
$$I = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}, \qquad J = \frac{1}{4}.$$
4. Exercice 4 :
$$I = \frac{e^2 + 1}{4}, \qquad J = 1, \qquad K = \frac{\pi}{2} - 1.$$
5. Exercice 5 :
$$I = \frac{1}{2}\ln 3, \qquad J = \ln 2.$$
6. Exercice 6 :
$$I = \frac{8}{15}, \qquad J = \frac{3\pi}{16}.$$
7. Exercice 7 : La fonction $x \mapsto x^3 \sin x$ est paire. Ainsi,
$$\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \sin x \, dx = 2\int_0^{\pi} x^3 \sin x \, dx = 2\pi^3 - 12\pi.$$
8. Exercice 8 : L'intégrale I converge si et seulement si $p > 1$, auquel cas $I = 1/(p-1)$. De plus,
$$J = 2.$$
9. Exercice 9 : Une intégration par parties, suivie d'une simplification rationnelle, donne
$$I = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}.$$

12 Conclusion

Les techniques de calcul d'intégrales s'organisent autour de quelques idées fondamentales : reconnaître une primitive, transformer la variable, exploiter la dérivation d'un produit et décomposer les expressions rationnelles.

Le choix de la méthode dépend de la forme de l'intégrande et des objectifs du calcul. Une bonne résolution ne se limite pas à obtenir un résultat : elle explicite les hypothèses, justifie les transformations et contrôle la validité des bornes.

Pour l'oral du CAPES, il est particulièrement utile de mettre en évidence les liens entre les techniques, de comparer plusieurs méthodes sur un même exemple et de proposer des exercices progressifs permettant d'en comprendre le domaine d'application.

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses, 2e édition, 2008.

[2] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini, éditions successives.

[3] J.-P. Ramis, A. Warusfel et collaborateurs, *Mathématiques tout-en-un pour la Licence*, Dunod, collections et éditions successives.

[4] J.-M. Monier, *Analyse MP*, Dunod, collections et éditions successives.

[5] R. G. Bartle et D. R. Sherbert, *Introduction to Real Analysis*, Wiley, 4e édition, 2011.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale. Consulter les programmes en vigueur sur https://www.education.gouv.fr/.