Équations différentielles

Leçon pour l'oral du CAPES de mathématiques

Prérequis et objectifs

Prérequis. La leçon mobilise les notions de dérivée, de fonction exponentielle, de calcul intégral, de continuité et de fonctions usuelles. La maîtrise des équations algébriques, des changements de variables et des calculs de primitives est également nécessaire. Pour les équations linéaires d'ordre deux, on utilisera les racines d'un polynôme caractéristique.

Objectifs. Il s'agit de présenter les équations différentielles comme des modèles reliant une fonction inconnue à ses dérivées, de savoir résoudre les principales équations différentielles linéaires du premier ordre et à coefficients constants du second ordre, et de comprendre le rôle des conditions initiales. On cherchera également à distinguer les méthodes de résolution explicites des résultats généraux d'existence et d'unicité, puis à illustrer ces notions par des modèles issus des sciences.

Problématique. Comment déterminer une fonction à partir d'une relation entre cette fonction et ses dérivées, et dans quelles conditions cette fonction est-elle déterminée de manière unique par une condition initiale ?

Table des matières

Prérequis et objectifs **1**

1 Généralités sur les équations différentielles **2**

1.1 Définition . . . 2

1.2 Conditions initiales . . . 2

1.3 Équations linéaires . . . 2

2 Équations différentielles du premier ordre **3**

2.1 Équations à variables séparables . . . 3

2.2 Équations linéaires du premier ordre . . . 3

2.3 Cas des coefficients constants . . . 4

3 Équations différentielles linéaires du second ordre **4**

3.1 Équation homogène à coefficients constants . . . 4

3.2 Exemple : oscillateur harmonique . . . 5

3.3 Équations non homogènes . . . 5

4 Existence et unicité : le théorème de Cauchy–Lipschitz **5**

4.1 Énoncé . . . 5

4.2 Exemple d'unicité . . . 6

4.3 Contre-exemple à l'unicité 6

5 Applications et modélisation **6**

5.1 Croissance et décroissance exponentielles 6

5.2 Refroidissement de Newton 7

5.3 Circuit électrique du premier ordre 7

6 Approche qualitative et limites des méthodes **7**

7 Exercices **8**

8 Conclusion **9**

Références bibliographiques **9**

1 Généralités sur les équations différentielles

1.1 Définition

Définition 1.1. Une équation différentielle est une relation faisant intervenir une fonction inconnue et une ou plusieurs de ses dérivées. L'ordre de l'équation est l'ordre maximal des dérivées qui y figurent.

Une équation différentielle ordinaire du premier ordre peut s'écrire sous la forme

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Une équation du second ordre peut notamment s'écrire

$$y''(t) = f(t, y(t), y'(t)).$$

Une solution est une fonction suffisamment dérivable qui vérifie l'équation sur un intervalle donné.

Exemple 1.1. L'équation

$$y' = 2y$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre. Ses solutions sur $\mathbb{R}$ sont

$$y(t) = Ce^{2t}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

1.2 Conditions initiales

Une équation différentielle admet généralement une famille de solutions. Une condition initiale permet de sélectionner une solution particulière.

Pour une équation du premier ordre, on considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

Pour une équation du second ordre, on peut imposer

$$\begin{cases} y''(t) = f(t, y(t), y'(t)), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = v_0. \end{cases}$$

Il faut distinguer l'existence d'une solution de son unicité. Les deux propriétés ne sont pas automatiques.

1.3 Équations linéaires

Une équation différentielle linéaire du premier ordre s'écrit

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

où a et b sont des fonctions données.

Une équation linéaire du second ordre s'écrit

$$y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t).$$

Lorsque le second membre est nul, l'équation est dite *homogène*. Sinon, elle est dite *non homogène* ou *avec second membre*.

La linéarité implique que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel. Pour une équation non homogène, si y_p est une solution particulière, toutes les solutions s'obtiennent en ajoutant à y_p les solutions de l'équation homogène associée.

2 Équations différentielles du premier ordre

2.1 Équations à variables séparables

Une équation à variables séparables est une équation de la forme

$$y' = g(t)h(y).$$

Lorsque les divisions effectuées sont licites, on écrit

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t),$$

puis on intègre :

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{h(y)} = \int g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il convient de traiter séparément les solutions constantes éventuelles vérifiant $h(y) = 0$, car la division par $h(y)$ les éliminerait.

Exemple 2.1. Résolvons

$$y' = y^2.$$

Les solutions constantes sont $y = 0$. Pour une solution non nulle, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}t, \qquad -\frac{1}{y} = t + C.$$

Ainsi,

$$y(t) = \frac{1}{C - t},$$

sur tout intervalle ne contenant pas le pôle $t = C$.

2.2 Équations linéaires du premier ordre

Considérons

$$y' + a(t)y = b(t),$$

où a et b sont continues sur un intervalle I.

On définit un facteur intégrant par

$$\mu(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Alors μ ne s'annule pas et

$$(\mu y)' = \mu b.$$

Par intégration, toutes les solutions sont données par

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left(C + \int_{t_0}^{t} \mu(s) b(s) \, \mathrm{d}s \right), \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Cette formule fournit une méthode systématique de résolution.

Exemple 2.2. Résolvons

$$y' + 2y = \mathrm{e}^{t}.$$

Un facteur intégrant est $\mu(t) = \mathrm{e}^{2t}$. On obtient

$$(\mathrm{e}^{2t} y)' = \mathrm{e}^{3t},$$

d'où

$$y(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} + C\mathrm{e}^{-2t}.$$

Si $y(0) = 1$, alors $C = 2/3$, donc

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{t} + \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t}}.$$

2.3 Cas des coefficients constants

Pour l'équation

$$y' + ay = b,$$

où a et b sont des constantes réelles, si $a \neq 0$, les solutions sont

$$y(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}.$$

Si $a = 0$, l'équation devient $y' = b$, et ses solutions sont

$$y(t) = bt + C.$$

Ces formules permettent notamment d'étudier les régimes transitoires et les régimes permanents.

3 Équations différentielles linéaires du second ordre

3.1 Équation homogène à coefficients constants

Considérons

$$ay'' + by' + cy = 0, \qquad a \neq 0.$$

On cherche des solutions de la forme $y(t) = \mathrm{e}^{rt}$. Le nombre r doit vérifier l'équation caractéristique

$$ar^2 + br + c = 0.$$

Trois cas se présentent.

Deux racines réelles distinctes r_1, r_2.

$$y(t) = C_1\mathrm{e}^{r_1 t} + C_2\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

Une racine réelle double r.

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{rt}.$$

Deux racines complexes conjuguées $\alpha \pm i\beta$, avec $\beta \neq 0$.

$$y(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

3.2 Exemple : oscillateur harmonique

Considérons

$$y'' + \omega^2 y = 0, \qquad \omega > 0.$$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Les solutions sont

$$y(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Les conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = v_0$ donnent

$$\boxed{y(t) = y_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}.$$

Cette équation décrit, dans un modèle idéal, les oscillations d'un système masse-ressort sans frottement.

3.3 Équations non homogènes

Considérons

$$ay'' + by' + cy = f(t).$$

La solution générale s'écrit

$$y = y_h + y_p,$$

où y_h est la solution générale de l'équation homogène associée et y_p une solution particulière de l'équation avec second membre.

Deux méthodes classiques permettent de déterminer y_p.

- **Recherche d'une solution particulière :** lorsque f est une combinaison de polynômes, d'exponentielles, de sinus ou de cosinus, on peut essayer une fonction de même type, en adaptant l'ansatz en cas de résonance.
- **Variation des constantes :** on remplace les constantes de la solution homogène par des fonctions à déterminer.

Exemple 3.1. Résolvons

$$y'' + y = 1.$$

L'équation homogène associée donne

$$y_h = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Une solution particulière est $y_p = 1$. Ainsi,

$$\boxed{y(t) = 1 + C_1 \cos t + C_2 \sin t}.$$

4 Existence et unicité : le théorème de Cauchy–Lipschitz

4.1 Énoncé

Théorème 4.1 (Cauchy–Lipschitz, forme locale)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.*

Pour tout (t_0, y_0) de cet ouvert, il existe un intervalle ouvert J contenant t_0 sur lequel le problème

$$\begin{cases} y' = f(t, y), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution maximale locale.

La continuité de f garantit l'existence locale dans le cadre du théorème de Peano, tandis que l'hypothèse de Lipschitz par rapport à y assure l'unicité dans le théorème de Cauchy–Lipschitz.

Une condition suffisante de régularité est que la dérivée partielle $\partial f/\partial y$ existe et soit continue au voisinage du point considéré.

4.2 Exemple d'unicité

Considérons

$$y' = y, \qquad y(0) = 1.$$

La fonction $f(t, y) = y$ est continue et lipschitzienne par rapport à y. Le théorème garantit l'existence et l'unicité de la solution. Le calcul explicite donne

$$y(t) = \mathrm{e}^t.$$

4.3 Contre-exemple à l'unicité

Considérons le problème

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Pour tout $a \geq 0$, la fonction

$$y_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a, \\ (t-a)^2, & t > a \end{cases}$$

est une solution sur $\mathbb{R}$.

En effet, elle est dérivable en a, et elle vérifie l'équation ainsi que la condition initiale. Le problème admet donc plusieurs solutions.

La fonction $y \mapsto 2\sqrt{|y|}$ est continue, mais n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de 0. Cet exemple montre que la continuité seule ne suffit pas à assurer l'unicité.

5 Applications et modélisation

5.1 Croissance et décroissance exponentielles

Si la vitesse de variation d'une quantité $N(t)$ est proportionnelle à cette quantité, on écrit

$$N'(t) = kN(t).$$

La solution est

$$N(t) = N(0)\mathrm{e}^{kt}.$$

Si $k > 0$, il s'agit d'une croissance exponentielle ; si $k < 0$, il s'agit d'une décroissance exponentielle.

Ce modèle est utilisé pour décrire, sous certaines hypothèses, une population, une quantité radioactive ou une grandeur soumise à une décroissance proportionnelle à sa valeur.

5.2 Refroidissement de Newton

Si la température $T(t)$ d'un corps évolue vers une température ambiante constante T_a, un modèle simple est

$$T' = -k(T - T_a), \qquad k > 0.$$

En posant $U = T - T_a$, on obtient

$$U' = -kU.$$

Ainsi,

$$\boxed{T(t) = T_a + (T(0) - T_a)\mathrm{e}^{-kt}}.$$

Le modèle suppose notamment que le coefficient d'échange thermique et la température ambiante restent constants.

5.3 Circuit électrique du premier ordre

Dans un circuit série comportant une résistance R et un condensateur de capacité C, soumis à une tension constante E, la tension u_C aux bornes du condensateur vérifie

$$RC\,u_C' + u_C = E.$$

Pour une condition initiale $u_C(0) = u_0$, on obtient

$$\boxed{u_C(t) = E + (u_0 - E)\mathrm{e}^{-t/(RC)}}.$$

La constante de temps RC caractérise la rapidité de l'évolution.

6 Approche qualitative et limites des méthodes

Les méthodes explicites présentées précédemment ne s'appliquent pas à toutes les équations différentielles. Même lorsqu'une solution existe et est unique, elle peut ne pas s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles.

L'étude qualitative permet alors d'obtenir des informations sur les solutions sans les calculer explicitement.

Pour une équation autonome

$$y' = g(y),$$

les points d'équilibre sont les solutions de $g(y) = 0$. Le signe de g permet de déterminer les intervalles sur lesquels les solutions sont croissantes ou décroissantes.

Pour des problèmes plus complexes, on peut recourir à des méthodes numériques, comme Euler :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n), \qquad t_{n+1} = t_n + h.$$

Cette méthode fournit une approximation de la solution, mais son utilisation exige de discuter l'erreur et la stabilité selon le problème étudié.

7 Exercices

Les exercices suivants permettent de travailler les techniques de résolution, les conditions initiales, les théorèmes d'existence et d'unicité et la modélisation.

Exercice 7.1 (Équation à variables séparables)**.** Résoudre sur les intervalles adaptés :

$$y' = y(1-y).$$

Déterminer les solutions constantes. Pour les solutions non constantes, préciser les intervalles de définition et étudier les limites aux bornes de ces intervalles.

Exercice 7.2 (Équation linéaire du premier ordre)**.** Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' + 3y = 2\mathrm{e}^{-t}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier le comportement de la solution lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 7.3 (Équation du second ordre)**.** Résoudre

$$y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Déterminer la limite de la solution lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 7.4 (Second membre sinusoïdal)**.** Résoudre

$$y'' + y = \cos t.$$

On cherchera une solution particulière adaptée à la présence d'une résonance, puis on déterminera la solution vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

Exercice 7.5 (Existence et unicité)**.** Étudier l'existence et l'unicité des solutions du problème

$$\begin{cases} y' = |y|, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Comparer avec le problème

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{|y|}, \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Préciser les hypothèses des théorèmes utilisés.

Exercice 7.6 (Refroidissement)**.** Un corps est initialement à 90°C dans une pièce à 20°C. On suppose que sa température vérifie

$$T' = -k(T - 20), \qquad k > 0.$$

Déterminer $T(t)$, puis exprimer le temps nécessaire pour que le corps atteigne 40°C. On supposera que cette température est atteinte.

Exercice 7.7 (Méthode d'Euler)**.** On considère

$$y' = -y, \qquad y(0) = 1.$$

Écrire les itérations de la méthode d'Euler avec un pas $h > 0$. Calculer les approximations pour $h = 0,2$ aux instants $t_n = nh$, pour $n = 0, \ldots, 5$. Comparer avec la solution exacte.

8 Conclusion

Les équations différentielles permettent de modéliser des phénomènes d'évolution et de relier une grandeur à sa vitesse de variation.

Les méthodes de résolution explicite des équations linéaires du premier ordre et des équations linéaires du second ordre à coefficients constants constituent des outils fondamentaux. Les conditions initiales sélectionnent une solution lorsqu'unicité est garantie.

Le théorème de Cauchy–Lipschitz donne un cadre général pour l'existence et l'unicité locales. Enfin, les approches qualitatives et numériques complètent les méthodes exactes lorsque celles-ci ne suffisent pas.

Références bibliographiques

Références

[1] X. Gourdon, *Les maths en tête : Analyse*, Ellipses. Ouvrage de référence pour les notions d'analyse et les méthodes de calcul.

[2] F. Rouvière, *Petit guide de calcul différentiel*, Cassini. Référence utile pour les outils d'analyse nécessaires à l'étude des équations différentielles.

[3] E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Dover Publications. Présentation classique des équations différentielles ordinaires et des problèmes de Cauchy.

[4] V. I. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Éditions Mir. Ouvrage consacré aux aspects analytiques et géométriques des équations différentielles.

[5] M. Berger, *Géométrie*, Nathan. Ouvrage général pouvant servir de complément pour les liens entre analyse, géométrie et modélisation.

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes officiels de mathématiques des classes préparatoires et du lycée*. Documents institutionnels à consulter pour adapter les exemples et les attendus au niveau d'enseignement visé.