Leçon d'oral du CAPES de mathématiques

Problèmes conduisant à la résolution d'équations différentielles

Modélisation, résolution et interprétation

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

2 Introduction : de la situation concrète à l'équation différentielle **2**

3 Outils mathématiques **2**
- 3.1 Équation différentielle du premier ordre . . . 2
- 3.2 Équation différentielle linéaire . . . 3
- 3.3 Équation à variables séparables . . . 3

4 Problème 1 : désintégration radioactive **3**
- 4.1 Modélisation . . . 3
- 4.2 Résolution . . . 4
- 4.3 Demi-vie . . . 4
- 4.4 Discussion . . . 4

5 Problème 2 : refroidissement d'un corps **4**
- 5.1 Loi de refroidissement de Newton . . . 4
- 5.2 Résolution . . . 5
- 5.3 Interprétation . . . 5
- 5.4 Détermination expérimentale du paramètre . . . 5

6 Problème 3 : croissance d'une population **5**
- 6.1 Le modèle de Malthus . . . 5
- 6.2 Limites du modèle . . . 6
- 6.3 Le modèle logistique . . . 6

7 Problème 4 : quantité d'un médicament dans l'organisme **6**
- 7.1 Élimination sans apport . . . 6
- 7.2 Apport constant et élimination . . . 6

8 Problème 5 : charge d'un condensateur **7**
- 8.1 Équation électrique . . . 7
- 8.2 Résolution . . . 7
- 8.3 Intérêt du modèle . . . 7

9 Méthode générale de résolution d'un problème **8**

10 Erreurs fréquentes et points de vigilance **8**

11 Proposition de déroulement à l'oral **8**

12 Liste d'exercices **9**

13 Éléments de correction **11**

14 Conclusion **13**

15 Références bibliographiques **13**

1 Prérequis et objectifs

Prérequis. Cette leçon suppose connues les notions de fonction dérivable, de dérivée et d'équation différentielle. Il est nécessaire de maîtriser les fonctions usuelles, notamment les fonctions exponentielle et logarithme, ainsi que les calculs d'intégrales et les équations différentielles linéaires du premier ordre. Les notions de proportionnalité, de taux de variation, de conditions initiales et de résolution d'équations algébriques interviennent également. Une connaissance élémentaire des grandeurs physiques et des unités facilite l'interprétation des modèles.

Objectifs. L'objectif principal est de montrer comment une situation concrète peut conduire à une équation différentielle. Il s'agit d'identifier les grandeurs pertinentes, de traduire une hypothèse d'évolution en une relation faisant intervenir une fonction inconnue et sa dérivée, puis de résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales. On cherche ensuite à interpréter la solution, à vérifier sa cohérence avec le phénomène étudié et à discuter les limites du modèle. Les exemples retenus concernent la désintégration radioactive, le refroidissement d'un corps, la croissance d'une population et la dynamique d'une quantité soumise à un apport et à une élimination.

2 Introduction : de la situation concrète à l'équation différentielle

De nombreux phénomènes naturels, économiques ou techniques sont décrits par des grandeurs qui évoluent au cours du temps. La température d'un objet, la quantité d'un médicament dans le sang, la population d'une espèce ou la charge électrique d'un condensateur constituent des exemples.

Lorsque la vitesse d'évolution d'une grandeur dépend de sa valeur, de l'écart à une valeur d'équilibre ou d'autres grandeurs connues, on peut obtenir une relation entre la fonction inconnue et ses dérivées.

Une telle relation est une équation différentielle.

La démarche de modélisation comporte généralement quatre étapes :

1. définir les variables et les paramètres du problème ;
2. formuler des hypothèses sur le phénomène étudié ;
3. traduire ces hypothèses en équation différentielle ;
4. résoudre l'équation et interpréter la solution dans le contexte initial.

Il faut distinguer la résolution mathématique du modèle et la validation de ce modèle : une solution exacte de l'équation ne garantit pas que les hypothèses décrivent fidèlement la réalité.

3 Outils mathématiques

3.1 Équation différentielle du premier ordre

Définition 1. *Une équation différentielle du premier ordre est une relation faisant intervenir une fonction inconnue y et sa dérivée y'. Elle peut s'écrire, par exemple,*

$$y'(t) = f(t, y(t)).$$

Une condition initiale, telle que $y(0) = y_0$, permet de sélectionner une solution particulière lorsque les hypothèses d'existence et d'unicité sont satisfaites.

3.2 Équation différentielle linéaire

On considère l'équation

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t),$$

où a et b sont des fonctions données.

Dans le cas où a et b sont constantes, on obtient

$$y' + ay = b.$$

Si $a \neq 0$, les solutions sont

$$y(t) = Ce^{-at} + \frac{b}{a}, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Si l'on impose $y(0) = y_0$, alors

$$y(t) = \frac{b}{a} + \left(y_0 - \frac{b}{a}\right) e^{-at}.$$

Cette formule est particulièrement importante en modélisation. Elle décrit une évolution vers la valeur d'équilibre b/a lorsque $a > 0$.

Dans le cas général, on peut utiliser un facteur intégrant. En posant

$$\mu(t) = \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\,ds\right),$$

on obtient

$$(\mu y)' = \mu b.$$

L'intégration fournit alors la solution satisfaisant la condition initiale.

3.3 Équation à variables séparables

Une équation de la forme

$$y' = g(t)h(y)$$

peut, lorsque $h(y) \neq 0$, se ramener à

$$\frac{y'}{h(y)} = g(t).$$

Une intégration donne

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(t)\,dt.$$

Il faut également examiner les solutions constantes éventuelles vérifiant $h(y) = 0$, car la division par $h(y)$ peut les faire disparaître.

4 Problème 1 : désintégration radioactive

4.1 Modélisation

On note $N(t)$ le nombre de noyaux radioactifs présents à l'instant t. On suppose que, pendant un intervalle de temps très court, la diminution du nombre de noyaux est proportionnelle au nombre de noyaux encore présents.

Cette hypothèse conduit à

$$N'(t) = -\lambda N(t), \qquad \lambda > 0.$$

Le coefficient λ est appelé constante de désintégration. Son unité est l'inverse d'une unité de temps.

4.2 Résolution

L'équation est à variables séparables :

$$\frac{N'(t)}{N(t)} = -\lambda.$$

Après intégration,

$$\ln N(t) = -\lambda t + C,$$

lorsque $N(t) > 0$. Ainsi,

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

où $N_0 = N(0)$.

La solution satisfait bien la condition initiale $N(0) = N_0$.

4.3 Demi-vie

La demi-vie $T_{1/2}$ est définie par

$$N(T_{1/2}) = \frac{N_0}{2}.$$

Par conséquent,

$$e^{-\lambda T_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

et donc

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}}.$$

La demi-vie ne dépend pas de la quantité initiale. Après deux demi-vies, il reste un quart de la quantité initiale ; après trois demi-vies, il en reste un huitième.

4.4 Discussion

Le modèle exponentiel est pertinent à l'échelle macroscopique et dans le cadre probabiliste habituel de la désintégration radioactive. Il ne prédit pas le comportement exact d'un petit ensemble de noyaux : il s'agit d'une loi statistique.

5 Problème 2 : refroidissement d'un corps

5.1 Loi de refroidissement de Newton

On considère un objet dont la température est $T(t)$. La température ambiante T_a est supposée constante. On suppose que la vitesse de variation de la température est proportionnelle à l'écart entre la température de l'objet et celle du milieu extérieur.

On écrit

$$T'(t) = -k\big(T(t) - T_a\big), \qquad k > 0.$$

Cette équation constitue une modélisation simplifiée des échanges thermiques.

5.2 Résolution

Posons

$$u(t) = T(t) - T_a.$$

Puisque T_a est constante, $u' = T'$, et l'équation devient

$$u' = -ku.$$

On en déduit

$$u(t) = Ce^{-kt}.$$

Si $T(0) = T_0$, alors $C = T_0 - T_a$, d'où

$$\boxed{T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}}.$$

5.3 Interprétation

Lorsque t tend vers $+\infty$,

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_a.$$

La température de l'objet se rapproche de celle du milieu extérieur. Si $T_0 > T_a$, la température décroît ; si $T_0 < T_a$, elle augmente.

Le paramètre k détermine la rapidité de l'évolution. Plus k est grand, plus le rapprochement vers la température ambiante est rapide.

5.4 Détermination expérimentale du paramètre

À partir de la relation

$$T(t) - T_a = (T_0 - T_a)e^{-kt},$$

on peut écrire, lorsque les écarts sont non nuls,

$$\ln|T(t) - T_a| = \ln|T_0 - T_a| - kt.$$

La représentation de $\ln|T(t) - T_a|$ en fonction du temps est donc une droite de pente $-k$. Des mesures expérimentales permettent ainsi d'estimer le paramètre du modèle.

6 Problème 3 : croissance d'une population

6.1 Le modèle de Malthus

On note $P(t)$ la taille d'une population. Dans un milieu où les ressources sont supposées illimitées, on peut supposer que le taux de croissance est proportionnel à l'effectif :

$$P'(t) = rP(t), \qquad r > 0.$$

La résolution donne

$$\boxed{P(t) = P_0e^{rt}},$$

où $P_0 = P(0)$.

Le modèle prédit une croissance exponentielle. Le temps de doublement T_2 vérifie

$$P(T_2) = 2P_0,$$

d'où

$$\boxed{T_2 = \frac{\ln 2}{r}}.$$

6.2 Limites du modèle

Le modèle de Malthus devient peu réaliste sur une longue durée lorsque les ressources sont limitées, que la compétition augmente ou que les conditions du milieu changent.

Il ne faut donc pas confondre une solution mathématique et une prévision fiable à long terme.

6.3 Le modèle logistique

Une amélioration consiste à faire dépendre le taux de croissance de l'effectif :

$$P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

où $r > 0$ et $K > 0$.

Le paramètre K représente la capacité limite du milieu.

Les solutions constantes sont

$$P(t) = 0 \quad \text{et} \quad P(t) = K.$$

Pour une condition initiale $P(0) = P_0 > 0$, avec $P_0 \neq K$, la solution s'écrit

$$\boxed{P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}}.$$

Si $0 < P_0 < K$, la population croît et tend vers K. Si $P_0 > K$, elle décroît vers K.

Ce modèle illustre une équation différentielle non linéaire dont la solution est obtenue par séparation des variables.

7 Problème 4 : quantité d'un médicament dans l'organisme

7.1 Élimination sans apport

On note $Q(t)$ la quantité d'un médicament dans l'organisme. On suppose que la vitesse d'élimination est proportionnelle à la quantité présente :

$$Q'(t) = -kQ(t), \qquad k > 0.$$

Si $Q(0) = Q_0$, alors

$$\boxed{Q(t) = Q_0 e^{-kt}}.$$

Ce modèle suppose que le taux d'élimination reste constant et que la quantité étudiée peut être décrite par une seule variable.

7.2 Apport constant et élimination

Supposons maintenant qu'une substance soit apportée à débit constant $s > 0$, tandis que son élimination reste proportionnelle à la quantité présente. Le bilan conduit à

$$Q'(t) = s - kQ(t).$$

La solution satisfaisant $Q(0) = Q_0$ est

$$\boxed{Q(t) = \frac{s}{k} + \left(Q_0 - \frac{s}{k}\right) e^{-kt}}.$$

La quantité d'équilibre est

$$Q_{\text{eq}} = \frac{s}{k}.$$

En effet, à l'équilibre, la quantité apportée par unité de temps compense exactement la quantité éliminée par unité de temps.

Si $Q_0 = 0$, alors

$$Q(t) = \frac{s}{k}(1 - e^{-kt}),$$

et la quantité augmente progressivement vers s/k.

Cette équation décrit un bilan entre un apport extérieur et une élimination. Elle apparaît également dans d'autres domaines, par exemple pour le remplissage d'un réservoir soumis à une fuite proportionnelle à son contenu.

8 Problème 5 : charge d'un condensateur

8.1 Équation électrique

Dans un circuit série comportant une résistance R et un condensateur de capacité C, alimenté par une tension constante E, la loi des mailles conduit, pendant la charge, à

$$Ri(t) + u_C(t) = E,$$

où $i(t)$ désigne l'intensité et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur.

Comme

$$i(t) = Cu'_C(t),$$

on obtient

$$RCu'_C(t) + u_C(t) = E.$$

Ainsi,

$$u'_C(t) + \frac{1}{RC}u_C(t) = \frac{E}{RC}.$$

8.2 Résolution

Si le condensateur est initialement déchargé, $u_C(0) = 0$, la solution est

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - e^{-t/(RC)}\right)}.$$

La constante de temps est

$$\tau = RC.$$

À l'instant $t = \tau$, on a

$$u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}).$$

La tension atteint donc environ $63\,\%$ de sa valeur finale au bout d'une constante de temps.

8.3 Intérêt du modèle

Cet exemple montre qu'une équation différentielle peut être obtenue à partir de lois physiques élémentaires, ici la loi d'Ohm, la relation entre courant et tension du condensateur, et la loi des mailles.

Il met également en évidence le rôle des paramètres dans la rapidité du phénomène.

9 Méthode générale de résolution d'un problème

On peut proposer la démarche suivante pour traiter un problème de modélisation.

1. **Choix des variables.** Définir la fonction inconnue, sa variable et les paramètres.
2. **Formulation des hypothèses.** Identifier les mécanismes d'évolution et préciser les simplifications retenues.
3. **Établissement de l'équation.** Traduire le taux de variation ou le bilan du phénomène en une relation différentielle.
4. **Conditions initiales.** Utiliser les données disponibles pour déterminer la solution particulière.
5. **Résolution.** Employer une méthode adaptée : séparation des variables, équation linéaire ou facteur intégrant.
6. **Interprétation.** Étudier les variations, les limites, les valeurs d'équilibre et les unités.
7. **Validation.** Vérifier la cohérence des résultats et discuter la pertinence des hypothèses.

Une vérification directe par dérivation de la solution obtenue est toujours souhaitable.

10 Erreurs fréquentes et points de vigilance

— Confondre une grandeur et sa vitesse de variation.

— Oublier le signe dans une loi de décroissance ou dans un bilan de flux.

— Ne pas vérifier l'homogénéité des unités : dans $y' = -ky$, le coefficient k possède l'unité inverse du temps.

— Oublier la condition initiale et laisser une constante arbitraire dans la solution finale.

— Diviser par une expression susceptible de s'annuler sans examiner les solutions particulières ainsi perdues.

— Interpréter une limite mathématique comme une certitude expérimentale sans discuter les hypothèses du modèle.

— Utiliser le modèle exponentiel de croissance sans tenir compte des ressources limitées.

— Confondre l'équilibre d'un modèle et la valeur réellement observée dans un système soumis à des perturbations.

11 Proposition de déroulement à l'oral

Une présentation possible en vingt-cinq minutes peut être organisée comme suit :

Partie	Durée indicative
Introduction et présentation de la démarche	3 min
Outils mathématiques indispensables	4 min
Refroidissement ou désintégration radioactive	7 min
Croissance logistique ou bilan avec apport	6 min
Exercice, limites des modèles et conclusion	5 min

Le refroidissement constitue un exemple central particulièrement adapté : la mise en équation, la résolution, l'exploitation de la condition initiale et l'interprétation de la limite y sont accessibles.

La croissance logistique permet ensuite d'ouvrir la discussion sur les équations non linéaires et les limites d'un modèle exponentiel.

Le candidat devra adapter le niveau de détail au libellé exact de la leçon et au temps disponible. Il est préférable de traiter rigoureusement deux exemples complémentaires plutôt que d'énumérer de nombreux modèles sans les justifier.

12 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent servir à la préparation de l'oral ou à une exploitation pédagogique.

Exercice 1 : désintégration radioactive

Une substance contient initialement N_0 noyaux radioactifs. Le nombre de noyaux restant à l'instant t est modélisé par une fonction N vérifiant

$$N'(t) = -\lambda N(t), \qquad N(0) = N_0.$$

La demi-vie de la substance vaut $T_{1/2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Exprimer λ en fonction de $T_{1/2}$.
3. Déterminer le temps nécessaire pour que $10\,\%$ des noyaux initiaux subsistent.
4. Interpréter la limite de $N(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 2 : refroidissement d'un liquide

Un liquide initialement à $80°\mathrm{C}$ est placé dans une pièce maintenue à $20°\mathrm{C}$. Sa température T vérifie

$$T' = -k(T - 20), \qquad T(0) = 80.$$

Après cinq minutes, sa température est de $50°\mathrm{C}$.

1. Déterminer l'expression de $T(t)$.
2. Calculer le coefficient k.
3. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre $30°\mathrm{C}$.
4. Préciser les hypothèses nécessaires pour utiliser ce modèle.

Exercice 3 : croissance d'une population

Une population de bactéries est modélisée par

$$P' = rP, \qquad P(0) = P_0.$$

On observe que la population double en trois heures.

1. Déterminer r.
2. Exprimer $P(t)$ en fonction de P_0.
3. Déterminer le temps nécessaire pour obtenir huit fois la population initiale.
4. Discuter la validité du modèle sur une longue période.

Exercice 4 : modèle logistique

Une population vérifie

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right), \qquad P(0) = P_0,$$

avec $0 < P_0 < K$.

1. Déterminer les solutions constantes.
2. Vérifier que
$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-rt}}$$
est solution.
3. Étudier le sens de variation de P.
4. Calculer la limite de $P(t)$ à long terme.
5. Comparer ce modèle au modèle de Malthus.

Exercice 5 : apport et élimination

Une quantité $Q(t)$ de substance est alimentée à débit constant $s > 0$ et éliminée à un taux proportionnel à la quantité présente :

$$Q' = s - kQ, \qquad Q(0) = 0,$$

où $k > 0$.

1. Résoudre cette équation.
2. Déterminer la valeur d'équilibre.
3. Calculer le temps nécessaire pour atteindre 90 % de la valeur d'équilibre.
4. Expliquer le sens physique de la constante $1/k$.

Exercice 6 : charge d'un condensateur

La tension u aux bornes d'un condensateur vérifie

$$RCu' + u = E, \qquad u(0) = 0,$$

où R, C et E sont des constantes positives.

1. Résoudre l'équation différentielle.
2. Déterminer la constante de temps.
3. Calculer la tension à l'instant RC.
4. Déterminer le temps nécessaire pour atteindre 95 % de la tension finale.

Exercice 7 : vidange d'un réservoir

On note $V(t)$ le volume de liquide dans un réservoir. On suppose que le débit de sortie est proportionnel au volume restant, sans apport extérieur :

$$V' = -kV, \qquad V(0) = V_0.$$

1. Résoudre l'équation.
2. Déterminer le temps au bout duquel le volume est divisé par deux.
3. Comparer cette loi avec celle d'une vidange gouvernée par la loi de Torricelli.
4. Discuter les hypothèses nécessaires pour retenir le modèle exponentiel.

Exercice 8 : identification d'un modèle

Une grandeur y tend vers une valeur d'équilibre L selon une loi du type

$$y' = -k(y - L), \qquad k > 0.$$

On dispose de plusieurs mesures expérimentales.

1. Montrer que
$$y(t) = L + (y(0) - L)e^{-kt}.$$
2. Montrer que, si $y(t) \neq L$,
$$\ln|y(t) - L| = \ln|y(0) - L| - kt.$$
3. Expliquer comment estimer k à partir de mesures.
4. Discuter l'influence des erreurs de mesure et du choix de L.

13 Éléments de correction

Exercice 1

On obtient

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

La condition $N(t) = 0{,}1N_0$ donne

$$t = \frac{\ln 10}{\lambda} = T_{1/2}\frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

La limite est nulle.

Exercice 2

La solution est

$$T(t) = 20 + 60e^{-kt}.$$

Puisque $T(5) = 50$,

$$30 = 60e^{-5k}, \qquad k = \frac{\ln 2}{5}.$$

Pour atteindre 30°C,

$$10 = 60e^{-kt}, \qquad t = \frac{\ln 6}{k} = \frac{5\ln 6}{\ln 2}.$$

Exercice 3

La condition de doublement donne

$$e^{3r} = 2, \qquad r = \frac{\ln 2}{3}.$$

Ainsi,

$$P(t) = P_0 e^{(\ln 2)t/3}.$$

Pour obtenir $8P_0 = 2^3 P_0$, il faut trois périodes de doublement, soit neuf heures.

Exercice 4

Les solutions constantes sont $P = 0$ et $P = K$. La formule proposée se vérifie par dérivation. Pour $0 < P_0 < K$, on a $P' > 0$ et

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = K.$$

Exercice 5

La solution est

$$Q(t) = \frac{s}{k}(1 - e^{-kt}).$$

La valeur d'équilibre est s/k. Pour atteindre 90 % de cette valeur,

$$1 - e^{-kt} = 0{,}9, \qquad t = \frac{\ln 10}{k}.$$

La quantité $1/k$ est une échelle caractéristique de temps du modèle.

Exercice 6

On trouve

$$u(t) = E(1 - e^{-t/(RC)}).$$

La constante de temps vaut $\tau = RC$ et

$$u(RC) = E(1 - e^{-1}).$$

Pour atteindre 95 % de la tension finale,

$$1 - e^{-t/(RC)} = 0{,}95, \qquad t = RC \ln 20.$$

Exercice 7

La solution est

$$V(t) = V_0 e^{-kt}.$$

Le temps de demi-volume est $\ln 2/k$. La loi de Torricelli conduit généralement à un débit proportionnel à la racine carrée de la hauteur de liquide, et non directement au volume. Les deux modèles reposent donc sur des hypothèses physiques différentes.

Exercice 8

La résolution de l'équation linéaire donne

$$y(t) = L + (y(0) - L)e^{-kt}.$$

La transformation logarithmique produit une droite de pente $-k$. Une régression linéaire sur les mesures transformées peut fournir une estimation de k, à condition de tenir compte de l'incertitude sur L et des erreurs expérimentales.

14 Conclusion

Les équations différentielles permettent de traduire mathématiquement des lois d'évolution. Leur intérêt ne se limite pas à la détermination d'une fonction : elles offrent un cadre pour analyser les tendances, les temps caractéristiques, les états d'équilibre et la sensibilité aux paramètres.

La désintégration radioactive et la croissance de Malthus conduisent à des lois exponentielles. Le refroidissement, l'apport avec élimination et la charge d'un condensateur conduisent à des équations linéaires du premier ordre avec second membre. Le modèle logistique illustre une équation non linéaire adaptée à une croissance limitée.

Le point essentiel de cette leçon est la chaîne

$$\boxed{\text{phénomène} \longrightarrow \text{hypothèses} \longrightarrow \text{équation} \longrightarrow \text{solution} \longrightarrow \text{interprétation}}$$

La pertinence d'un modèle dépend autant de la qualité des hypothèses que de la rigueur de la résolution.

15 Références bibliographiques

Références

[1] R. Roussier et J. R. Rameau, *Équations différentielles*, ouvrages et notes de cours de mathématiques consacrés aux équations différentielles ordinaires.

[2] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Hermann, Paris. Référence pour les outils du calcul différentiel et les équations différentielles.

[3] V. I. Arnold, *Équations différentielles ordinaires*, Mir, Moscou. Référence pour l'interprétation qualitative des équations différentielles.

[4] W. E. Boyce, R. C. DiPrima et D. B. Meade, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Wiley. Ouvrage de référence pour les méthodes de résolution et les applications.

[5] OpenStax, *Calculus, Volume 2*, Rice University. Chapitres consacrés aux équations différentielles et à leurs applications. https://openstax.org/details/books/calculus-volume-2

[6] Ministère de l'Éducation nationale, *Ressources d'accompagnement des programmes de mathématiques*. Ressources institutionnelles à consulter pour adapter les exemples aux programmes en vigueur. https://eduscol.education.fr/

[7] I. Prigogine et collaborateurs, ouvrages introductifs de modélisation des phénomènes physiques et de dynamique des systèmes. Références complémentaires pour la mise en relation des modèles mathématiques et des phénomènes étudiés.