Préparation à l'oral du CAPES de mathématiques

Problèmes conduisant à l'étude de fonctions

Leçon : modélisation, variations et optimisation

Problématique générale :
Comment traduire une situation géométrique, physique ou économique en un problème d'étude de fonction, puis utiliser les outils de l'analyse pour répondre à la question posée ?

Document de travail pour la préparation à l'oral

Table des matières

1 Prérequis et objectifs **2**

1.1 Prérequis . . . 2

1.2 Objectifs . . . 2

2 Introduction : de la situation au modèle **2**

3 Problèmes géométriques d'optimisation **3**

3.1 Maximiser l'aire d'un rectangle . . . 3

3.2 Optimisation d'une boîte sans couvercle . . . 4

4 Problèmes économiques **5**

4.1 Maximisation d'un bénéfice . . . 5

4.2 Seuil de rentabilité . . . 6

5 Problèmes de vitesse et de distance **6**

5.1 Distance parcourue lors d'un freinage . . . 6

6 Problèmes de croissance et de décroissance **7**

6.1 Croissance exponentielle . . . 7

6.2 Refroidissement d'un objet . . . 8

7 Problèmes d'existence et de nombre de solutions **8**

7.1 Résoudre graphiquement une équation . . . 8

7.2 Exemple avec une fonction quadratique . . . 9

8 Méthodes et outils à mobiliser **9**

8.1 Choisir la bonne variable . . . 9

8.2 Déterminer le domaine . . . 9

8.3 Choisir une méthode d'étude . . . 10

8.4 Interpréter le résultat . . . 10

9 Aspects didactiques et difficultés possibles **10**

9.1 Difficultés fréquentes . . . 10

9.2 Pistes pédagogiques . . . 10

10 Liste d'exercices **11**

11 Éléments de correction **13**

12 Conclusion **14**

1 Prérequis et objectifs

1.1 Prérequis

La leçon s'appuie sur les connaissances suivantes :

— calcul littéral, développement, factorisation et résolution d'équations et d'inéquations ;
— notions de fonction, d'ensemble de définition, d'image et d'antécédent ;
— lecture graphique et interprétation d'un tableau de valeurs ;
— fonctions usuelles : fonctions affines, polynômes, inverse, racine carrée, exponentielle et logarithme ;
— notions de dérivée, de nombre dérivé et de fonction dérivée ;
— lien entre le signe de la dérivée et les variations d'une fonction ;
— résolution de problèmes géométriques simples et utilisation des unités ;
— calcul numérique et, lorsque cela est pertinent, utilisation raisonnée d'un logiciel de calcul formel ou d'une calculatrice.

Les prérequis exacts dépendent du niveau de la situation étudiée. Certains problèmes peuvent être abordés au collège ou en seconde sans dérivation, tandis que d'autres nécessitent les outils de l'analyse du cycle terminal.

1.2 Objectifs

L'objectif principal est de savoir reconnaître une situation dans laquelle l'étude d'une fonction permet de répondre à une question concrète.

À l'issue de cette leçon, on doit être capable de :

— identifier la grandeur variable et la grandeur recherchée ;
— choisir une variable pertinente et déterminer son domaine de validité ;
— exprimer la grandeur étudiée en fonction de cette variable ;
— déterminer les caractéristiques utiles de la fonction : domaine, continuité, dérivabilité, variations, extrema et limites ;
— traduire une question concrète en équation, inéquation ou problème d'optimisation ;
— interpréter les résultats mathématiques dans le contexte initial, avec leurs unités et leurs contraintes ;
— distinguer une approximation numérique d'un résultat exact ;
— présenter une démarche de modélisation rigoureuse et argumentée.

Sur le plan didactique, il s'agit également de montrer que la fonction n'est pas seulement un objet à étudier : elle constitue un outil pour modéliser une situation et prendre une décision.

2 Introduction : de la situation au modèle

De nombreux problèmes consistent à déterminer une valeur optimale, à prévoir une évolution, à comparer plusieurs situations ou à déterminer les paramètres pour lesquels une condition est satisfaite.

Une démarche générale peut être organisée en cinq étapes :

1. **Comprendre la situation.** Identifier les données, les contraintes et la question posée.

2. **Choisir une variable.** La variable doit décrire les possibilités pertinentes de la situation.
3. **Construire une fonction.** Exprimer la grandeur étudiée en fonction de la variable.
4. **Étudier la fonction.** Rechercher les propriétés nécessaires pour répondre à la question.
5. **Interpréter la réponse.** Vérifier sa cohérence avec les contraintes, les unités et le contexte.

Il convient de distinguer trois niveaux :

— le *modèle*, qui traduit la situation réelle en langage mathématique ;
— le *traitement mathématique*, qui fournit une réponse dans le modèle ;
— la *validation*, qui consiste à interpréter et à vérifier cette réponse dans la situation initiale.

La difficulté d'un problème ne réside donc pas nécessairement dans le calcul de la dérivée. Elle peut se situer dans le choix de la variable, la détermination du domaine ou l'interprétation du résultat.

3 Problèmes géométriques d'optimisation

3.1 Maximiser l'aire d'un rectangle

Exemple 1. On dispose de 40 mètres de clôture pour construire un enclos rectangulaire. On suppose que toute la clôture est utilisée. Quelles dimensions permettent de maximiser l'aire de l'enclos ?

1. Modélisation

Notons x la longueur d'un côté et y celle du côté adjacent, en mètres.

La contrainte sur le périmètre donne

$$2x + 2y = 40,$$

donc

$$y = 20 - x.$$

Comme les dimensions sont strictement positives,

$$0 < x < 20.$$

L'aire est

$$A = xy.$$

Elle s'exprime donc en fonction de x :

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2.$$

Le problème géométrique est devenu un problème d'optimisation d'une fonction polynomiale sur l'intervalle $]0, 20[$.

2. Étude de la fonction

La fonction A est dérivable et

$$A'(x) = 20 - 2x.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} A'(x) &> 0 \quad \text{si } 0 < x < 10, \\ A'(x) &= 0 \quad \text{si } x = 10, \\ A'(x) &< 0 \quad \text{si } 10 < x < 20. \end{aligned}$$

La fonction A est donc croissante sur $]0, 10]$, puis décroissante sur $[10, 20[$.

Elle atteint son maximum en $x = 10$. On obtient

$$y = 20 - 10 = 10.$$

3. Conclusion

L'aire maximale vaut

$$A(10) = 10 \times 10 = 100 \text{ m}^2.$$

L'enclos d'aire maximale est un carré de côté 10 mètres.

4. Remarque didactique

Ce problème peut être traité sans dérivation, en écrivant

$$A(x) = 100 - (x - 10)^2.$$

Puisque $(x - 10)^2 \geq 0$, on a $A(x) \leq 100$.

Les deux méthodes permettent de travailler des compétences différentes : la mise en évidence d'une identité remarquable et l'étude des variations par dérivation.

3.2 Optimisation d'une boîte sans couvercle

Exemple 2. Dans un carré de carton de côté 30 cm, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x, puis on replie les bords pour former une boîte sans couvercle. On cherche à maximiser le volume.

1. Modélisation

Après découpage, la hauteur de la boîte est x et la base est un carré de côté $30 - 2x$.

Les contraintes géométriques donnent

$$0 < x < 15.$$

Le volume est donc

$$V(x) = x(30 - 2x)^2.$$

2. Étude de la fonction

Pour $x \in]0, 15[$,

$$\begin{aligned} V'(x) &= (30 - 2x)^2 - 4x(30 - 2x) \\ &= (30 - 2x)(30 - 6x) \\ &= 12(15 - x)(5 - x). \end{aligned}$$

Sur l'intervalle $]0, 15[$, le facteur $15 - x$ est positif. Le signe de $V'(x)$ est donc celui de $5 - x$.

Ainsi, V est croissante sur $]0, 5]$ et décroissante sur $[5, 15[$.

Le volume maximal est atteint pour $x = 5$ cm.

3. Conclusion

La boîte optimale a une hauteur de 5 cm et une base carrée de côté

$$30 - 2 \times 5 = 20 \text{ cm}.$$

Son volume maximal est

$$V(5) = 5 \times 20^2 = 2000 \text{ cm}^3.$$

4. Point de vigilance

Il est indispensable de déterminer le domaine de définition avant de dériver. Une valeur critique ne constitue une solution que si elle appartient au domaine admissible.

Dans ce problème, le domaine est imposé par la géométrie et non par le seul calcul algébrique.

4 Problèmes économiques

4.1 Maximisation d'un bénéfice

Exemple 3. Une entreprise vend un produit au prix unitaire de 50 euros. On modélise son coût total, en euros, pour une production de x unités par

$$C(x) = x^2 + 10x + 100.$$

On suppose que le modèle est valable pour $x \geq 0$. Le chiffre d'affaires est donné par $R(x) = 50x$. Déterminer la production qui maximise le bénéfice.

1. Construction de la fonction

Le bénéfice est la différence entre le chiffre d'affaires et le coût total :

$$B(x) = R(x) - C(x).$$

Ainsi,

$$B(x) = -x^2 + 40x - 100, \qquad x \geq 0.$$

2. Étude

La dérivée est

$$B'(x) = -2x + 40.$$

On obtient

$$\begin{aligned} B'(x) &> 0 \quad \text{si } 0 \leq x < 20, \\ B'(20) &= 0, \\ B'(x) &< 0 \quad \text{si } x > 20. \end{aligned}$$

La fonction atteint donc son maximum sur $[0, +\infty[$ pour $x = 20$.

3. Interprétation

Le bénéfice maximal prévu par le modèle est

$$B(20) = -400 + 800 - 100 = 300 \text{ euros.}$$

La production optimale est de 20 unités et le bénéfice maximal est de 300 euros.

Le modèle suppose toutefois que le prix de vente est constant et que la formule du coût reste valable pour toutes les quantités considérées. Dans une situation réelle, il faudrait aussi tenir compte des contraintes de production et de demande.

4.2 Seuil de rentabilité

Avec les fonctions précédentes, le seuil de rentabilité est obtenu en résolvant

$$B(x) = 0.$$

Cela revient à résoudre

$$-x^2 + 40x - 100 = 0,$$

soit

$$x^2 - 40x + 100 = 0.$$

Le discriminant vaut

$$\Delta = 40^2 - 4 \times 100 = 1200.$$

Les solutions sont

$$x = 20 \pm 10\sqrt{3}.$$

Elles sont toutes deux positives. Numériquement,

$$20 - 10\sqrt{3} \approx 2{,}68, \qquad 20 + 10\sqrt{3} \approx 37{,}32.$$

Le bénéfice est positif entre ces deux valeurs et négatif à l'extérieur.

Si le nombre d'unités produites doit être entier, il faut interpréter ces résultats en tenant compte de cette contrainte discrète. Le modèle continu permet de localiser les seuils, mais ne remplace pas l'analyse des quantités entières.

Ce second problème illustre une autre utilisation de l'étude de fonction : déterminer les valeurs d'un paramètre pour lesquelles une condition est vérifiée.

5 Problèmes de vitesse et de distance

5.1 Distance parcourue lors d'un freinage

Exemple 4. On utilise un modèle simplifié de la distance d'arrêt d'un véhicule :

$$D(v) = av + bv^2,$$

où v est la vitesse initiale, exprimée en mètres par seconde, et a, b sont deux constantes strictement positives. Le premier terme modélise la distance parcourue pendant le temps de réaction ; le second représente la distance de freinage.

1. Domaine et variations

La vitesse vérifie $v \geq 0$. On a

$$D'(v) = a + 2bv.$$

Puisque $a > 0$ et $b > 0$, on a

$$D'(v) > 0 \qquad \text{pour tout } v \geq 0.$$

La distance d'arrêt est donc strictement croissante avec la vitesse.

2. Comparaison de deux vitesses

Pour un facteur $\lambda > 0$,

$$D(\lambda v) = a\lambda v + b\lambda^2 v^2.$$

Le terme associé au freinage varie comme le carré de la vitesse, tandis que le terme associé à la réaction varie linéairement.

En particulier,

$$D(2v) = 2av + 4bv^2.$$

Doubler la vitesse ne signifie donc pas simplement doubler la distance d'arrêt. Le modèle prévoit une augmentation plus importante, en particulier pour le terme quadratique.

3. Discussion

La fonction permet de mettre en évidence une tendance et de comparer des situations. Elle ne constitue cependant pas une loi universelle : les coefficients dépendent notamment de la situation, et les conditions réelles de circulation peuvent modifier les distances.

Cet exemple montre l'importance de distinguer la conséquence mathématique d'un modèle et sa validité empirique.

6 Problèmes de croissance et de décroissance

6.1 Croissance exponentielle

Exemple 5. On modélise une population par la fonction

$$P(t) = P_0 \mathrm{e}^{kt},$$

où $P_0 > 0$, $k > 0$ et $t \geq 0$.

La dérivée est

$$P'(t) = kP_0 \mathrm{e}^{kt} = kP(t).$$

Comme $P'(t) > 0$, la fonction P est strictement croissante. De plus,

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = +\infty.$$

Pour déterminer le temps nécessaire pour atteindre une population cible $P_1 > P_0$, on résout

$$P_0 \mathrm{e}^{kt} = P_1.$$

Après division par P_0, puis application du logarithme,

$$kt = \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right).$$

Ainsi,

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right).$$

Le logarithme permet donc de transformer une équation exponentielle en une équation linéaire en t.

6.2 Refroidissement d'un objet

On considère le modèle

$$T(t) = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})\mathrm{e}^{-kt},$$

où T_{ext} est la température ambiante, T_0 la température initiale et $k > 0$.

Si $T_0 > T_{\text{ext}}$, alors

$$T'(t) = -k(T_0 - T_{\text{ext}})\mathrm{e}^{-kt} < 0.$$

La température décroît et

$$\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_{\text{ext}}.$$

La fonction admet une asymptote horizontale d'équation

$$y = T_{\text{ext}}.$$

On peut rechercher le temps nécessaire pour que la température atteigne une valeur intermédiaire T_1, avec $T_{\text{ext}} < T_1 < T_0$.

L'équation

$$T_1 = T_{\text{ext}} + (T_0 - T_{\text{ext}})\mathrm{e}^{-kt}$$

conduit à

$$t = \frac{1}{k}\ln\left(\frac{T_0 - T_{\text{ext}}}{T_1 - T_{\text{ext}}}\right).$$

Cette formule donne une durée théorique dans le cadre du modèle retenu.

7 Problèmes d'existence et de nombre de solutions

7.1 Résoudre graphiquement une équation

Considérons une équation de la forme

$$f(x) = m,$$

où m est un paramètre réel.

Les solutions sont les antécédents de m par la fonction f. Graphiquement, elles correspondent aux abscisses des points d'intersection de la courbe représentative de f avec la droite horizontale d'équation $y = m$.

Le nombre de solutions peut changer lorsque m traverse une valeur extrémale de f.

7.2 Exemple avec une fonction quadratique

Étudions

$$f(x) = x^2 - 4x + 1.$$

On écrit

$$f(x) = (x-2)^2 - 3.$$

La fonction admet un minimum égal à -3, atteint en $x = 2$.

L'équation

$$f(x) = m$$

équivaut à

$$(x-2)^2 = m + 3.$$

On distingue trois cas :

- si $m < -3$, il n'y a aucune solution réelle ;
- si $m = -3$, il existe une unique solution, $x = 2$;
- si $m > -3$, il existe deux solutions réelles.

L'étude des variations permet ainsi de déterminer le nombre de solutions sans résoudre directement toutes les équations.

Cette méthode se généralise aux fonctions continues et monotones. Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'établir l'existence d'une solution ; la stricte monotonie permet d'en établir l'unicité sur un intervalle.

8 Méthodes et outils à mobiliser

8.1 Choisir la bonne variable

La variable doit rendre la modélisation aussi simple que possible. Dans un problème géométrique, on choisit souvent une longueur ; dans un problème temporel, une durée ; dans un problème économique, une quantité produite ou vendue.

Il est utile de privilégier une variable qui permet d'exprimer toutes les autres grandeurs à l'aide des contraintes du problème.

8.2 Déterminer le domaine

Le domaine doit être obtenu à partir de la situation et des contraintes mathématiques.

Il faut notamment vérifier :

- les contraintes de positivité ;
- les longueurs, durées ou quantités admissibles ;
- les dénominateurs non nuls ;
- les conditions d'existence d'une racine carrée ou d'un logarithme ;
- la compatibilité des valeurs obtenues avec les unités.

Il faut également distinguer le domaine mathématique maximal d'une fonction et le domaine admissible dans le problème.

8.3 Choisir une méthode d'étude

Le choix dépend de la forme de la fonction et des outils disponibles.

— Une identité remarquable peut suffire pour déterminer un maximum ou un minimum.
— Un tableau de valeurs permet d'explorer numériquement une situation, sans démontrer à lui seul l'existence d'un extremum.
— Un graphique permet de formuler des conjectures et d'interpréter des intersections.
— La dérivation permet d'étudier les variations lorsque la fonction est dérivable.
— Les limites et la continuité permettent de traiter certains problèmes d'existence.
— Une résolution numérique est utile lorsque l'équation ne possède pas de solution explicite simple.

8.4 Interpréter le résultat

La conclusion doit répondre à la question initiale. Elle ne se réduit pas à donner la valeur d'un extremum.

Il faut préciser, selon le problème :

— la valeur optimale et les conditions qui la réalisent ;
— l'unité de mesure ;
— le caractère exact ou approché du résultat ;
— la compatibilité avec les contraintes ;
— les limites du modèle utilisé.

9 Aspects didactiques et difficultés possibles

9.1 Difficultés fréquentes

Les erreurs suivantes sont particulièrement fréquentes :

— confondre la variable et la grandeur étudiée ;
— oublier une contrainte géométrique ou économique ;
— utiliser un domaine trop large ou trop restreint ;
— calculer une dérivée sans exploiter son signe ;
— confondre une solution de l'équation dérivée nulle avec un extremum global ;
— interpréter un résultat numérique sans tenir compte des unités ;
— considérer qu'un graphique prouve à lui seul une propriété générale ;
— oublier de revenir à la question concrète.

9.2 Pistes pédagogiques

Une progression possible consiste à :

1. commencer par un problème géométrique accessible ;
2. faire expliciter les contraintes et le choix de la variable ;
3. construire collectivement la fonction ;
4. confronter une approche graphique à une démonstration algébrique ou analytique ;

5. comparer plusieurs méthodes de résolution ;
6. proposer un problème dans lequel le domaine admissible est essentiel ;
7. terminer par une situation issue d'un autre domaine, afin de vérifier le transfert des méthodes.

Un logiciel de géométrie dynamique ou un tableur peut aider à explorer les conjectures. Il convient ensuite de faire formuler et justifier mathématiquement les résultats.

10 Liste d'exercices

Les exercices suivants peuvent être proposés en préparation, en approfondissement ou en prolongement de la leçon.

Exercice 1 – Rectangle de périmètre fixé

Un rectangle a un périmètre de 60 cm. On note x la longueur d'un côté et y celle du côté adjacent.

a) Exprimer y en fonction de x.
b) Déterminer le domaine admissible.
c) Construire la fonction aire.
d) Déterminer les dimensions qui maximisent l'aire.
e) Résoudre le problème sans dérivation.

Exercice 2 – Boîte en carton

On découpe des carrés de côté x aux quatre coins d'un carré de carton de côté 24 cm, puis on replie les bords.

a) Déterminer le domaine admissible.
b) Exprimer le volume en fonction de x.
c) Étudier les variations de la fonction volume.
d) Déterminer les dimensions de la boîte de volume maximal.

Exercice 3 – Bénéfice

Une entreprise vend chaque unité 80 euros. Son coût total est modélisé par

$$C(x) = 2x^2 + 20x + 200, \qquad x \geq 0.$$

a) Déterminer le chiffre d'affaires.
b) Construire la fonction bénéfice.
c) Déterminer la quantité qui maximise le bénéfice.
d) Déterminer les quantités pour lesquelles le bénéfice est positif.
e) Discuter l'interprétation du résultat si la production doit être entière.

Exercice 4 – Distance d'arrêt

On considère

$$D(v) = 0{,}8v + 0{,}05v^2, \qquad v \geq 0,$$

où v est exprimée en mètres par seconde et $D(v)$ en mètres.

a) Étudier les variations de D.
b) Calculer $D(10)$ et $D(20)$.
c) Comparer les deux distances.
d) Expliquer pourquoi ce modèle ne suffit pas à décrire toutes les situations de freinage réelles.

Exercice 5 – Croissance exponentielle

Une population est modélisée par

$$P(t) = 1200\mathrm{e}^{0,03t}, \qquad t \geq 0.$$

a) Étudier les variations de P.
b) Déterminer le temps nécessaire pour que la population double.
c) Déterminer le temps nécessaire pour atteindre 2000 individus.
d) Discuter les limites d'une extrapolation à long terme.

Exercice 6 – Température

La température d'un objet est modélisée par

$$T(t) = 20 + 80\mathrm{e}^{-0,2t}, \qquad t \geq 0,$$

où t est exprimé en minutes et $T(t)$ en degrés Celsius.

a) Déterminer la température initiale.
b) Étudier les variations de T.
c) Déterminer la limite de T lorsque t tend vers $+\infty$.
d) Déterminer le temps nécessaire pour atteindre 40 degrés Celsius.

Exercice 7 – Nombre de solutions

On considère la fonction

$$f(x) = x^2 - 6x + 5.$$

a) Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}$.
b) Selon les valeurs du réel m, déterminer le nombre de solutions de $f(x) = m$.
c) Interpréter graphiquement les résultats.

Exercice 8 – Aire sous contrainte

Un rectangle est inscrit dans un demi-disque de rayon R. On note x la demi-longueur de sa base et y sa hauteur.

a) Établir la relation entre x, y et R.
b) Exprimer l'aire du rectangle en fonction de x.
c) Déterminer le domaine admissible.
d) Étudier la fonction obtenue et déterminer l'aire maximale.

Exercice 9 – Problème ouvert

Inventer une situation issue de la géométrie, de la physique, de l'économie ou des sciences de la vie dans laquelle il faut maximiser ou minimiser une grandeur.

Le travail devra présenter :

- les hypothèses du modèle ;
- le choix de la variable et son domaine ;
- la fonction étudiée ;
- une résolution justifiée ;
- une interprétation et une discussion des limites du modèle.

11 Éléments de correction

Cette section fournit les résultats principaux permettant de vérifier les exercices proposés.

Exercice 1. On a $y = 30 - x$, avec $0 < x < 30$. L'aire est

$$A(x) = x(30 - x) = 225 - (x - 15)^2.$$

Le maximum vaut 225 cm^2, atteint pour $x = y = 15$ cm.

Exercice 2. Le domaine est $0 < x < 12$ et

$$V(x) = x(24 - 2x)^2.$$

Sa dérivée est

$$V'(x) = 12(12 - x)(4 - x).$$

Le maximum est atteint pour $x = 4$ cm. La base mesure 16 cm de côté et le volume maximal vaut 1024 cm^3.

Exercice 3. Le chiffre d'affaires est $R(x) = 80x$ et

$$B(x) = -2x^2 + 60x - 200.$$

La dérivée est $B'(x) = -4x + 60$. Le bénéfice maximal est atteint pour $x = 15$ et vaut 250 euros. Les racines de B sont

$$x = \frac{15 \pm 5\sqrt{5}}{1}.$$

Le bénéfice est positif entre ces deux racines. Pour une production entière, il faut retenir les entiers admissibles dans cet intervalle.

Exercice 4. La fonction est strictement croissante car

$$D'(v) = 0{,}8 + 0{,}1v > 0.$$

On trouve $D(10) = 13$ m et $D(20) = 36$ m.

Exercice 5. La population est strictement croissante. Le temps de doublement vérifie

$$\mathrm{e}^{0{,}03t} = 2, \qquad t = \frac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1.$$

Pour atteindre 2000 individus,

$$t = \frac{\ln(2000/1200)}{0{,}03} \approx 17{,}0.$$

Exercice 6. La température initiale est 100 °C. La fonction est strictement décroissante et tend vers 20 °C. Pour atteindre 40 °C,

$$20 + 80\mathrm{e}^{-0{,}2t} = 40,$$

d'où

$$t = 5\ln 4 \approx 6{,}93 \text{ minutes.}$$

Exercice 7. On écrit

$$f(x) = (x-3)^2 - 4.$$

Le minimum vaut -4. L'équation $f(x) = m$ possède aucune solution si $m < -4$, une solution si $m = -4$ et deux solutions si $m > -4$.

Exercice 8. La relation géométrique est

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

L'aire du rectangle vaut

$$A(x) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}, \qquad 0 \leq x \leq R.$$

Le maximum est atteint pour

$$x = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad y = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

L'aire maximale vaut R^2.

12 Conclusion

Les problèmes conduisant à l'étude de fonctions constituent un lien essentiel entre les mathématiques et les autres domaines de connaissance.

La démarche repose sur trois compétences complémentaires : modéliser une situation, mobiliser les outils mathématiques adaptés et interpréter les résultats.

L'étude des variations, des extrema, des limites et des solutions d'équations permet de répondre à des questions d'optimisation, de prévision, de comparaison ou de décision.

Pour l'oral du CAPES, il est important de mettre en évidence non seulement les calculs, mais également les choix de modélisation, les hypothèses, les difficultés possibles des élèves et les limites des conclusions obtenues.

Références

[1] Ministère de l'Éducation nationale, *Programmes de mathématiques du lycée général et technologique*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale, notamment les programmes du cycle terminal.

[2] Ministère de l'Éducation nationale, *Programme de mathématiques du cycle 4*, Bulletin officiel de l'Éducation nationale.

[3] Jean-Marie Monier, *Analyse MPSI-PCSI-PTSI*, Dunod. Ouvrage de référence pour les fonctions, les limites, la continuité et la dérivation.

[4] Stella Baruk, *Dictionnaire de mathématiques élémentaires*, Seuil. Référence pour la réflexion sur les notions et le langage mathématiques.

[5] George Pólya, *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method*, Princeton University Press, 1945. Ouvrage classique consacré aux démarches de résolution de problèmes.

[6] Guy Brousseau, *Théorie des situations didactiques*, La Pensée Sauvage. Référence pour l'analyse didactique des situations d'apprentissage.